Grundzüge der Physik

als

Compendium zu seinen Vorlesungen

von

Dr. G. S. Ohm.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Physik.

Mit 80 Holzschnitten.

Nürnberg, 1853.
Im Verlag bei Joh. Leonh. Schrag.

Druck von Fr. Campe & Sohn.

Grundzüge der Physik

als

Compendium zu seinen Vorlesungen

von

Dr. G. S. Ohm.

Mit 159 Holzschnitten.

Nürnberg.
Im Verlag bei Joh. Leonh. Schrag.
1854.

Druck von Fr. Campe & Sohn.

Vorwort.

Als vor zwei Jahren der ehrenvolle Auftrag an mich ergangen war, Vorlesungen über Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität zu halten, wurde ich gar bald in Folge der ungewöhnlichen Einrichtung meines Hörsaals in die Nothwendigkeit versetzt, nicht nur den Widerwillen, den ich von jeher gegen die Ausarbeitung eines Leitfadens in mir empfand, zu überwinden, sondern auch die Herbeischaffung einer schriftlichen Beihülfe so sehr als möglich zu beschleunigen. Dieß bewirkte ich dadurch, daß ich meine Vorlesungen, in dem Maße als ich sie hielt, lithographirt erscheinen ließ, und das gegenwärtige Büchlein ist bis S. 463. ein fast unveränderter Abdruck jener Lithographien. Den Sachverständigen steht die Entscheidung zu, in wie fern diese Schrift Spuren ihres wenig vortheilhaften Ursprungs in sich trägt, und in wie weit durch sie die an ein Compendium zu machenden Anforderungen: „mit steter Hinweisung auf die Lücken, die von dem Leser, der den Gegenstand zu beherrschen lernen will, noch auszufüllen bleiben, einen klaren und in sich zusammenhängenden Ueberblick über die Hauptpunkte der Wissenschaft zu geben," in Erfüllung gegangen sind.

Die in der Regel spärlichen mathematischen Vorkenntnisse, welche Studirende, die meistens von humanistischen Lehranstalten herkommen, der Physik zubringen, machten mir eine eigenthümliche Anordnung des Stoffes zur Pflicht. Ich habe die Lehre vom Lichte bis ganz an's Ende dieser Schrift gerückt. Die in der ersten Abtheilung vorgetragene allgemeine Physik und von der beson-

dern Physik die vier ersten Kapitel, welche von der Wärme, vom Magnetismus, von der Electricität und vom Galvanismus handeln, nehmen nicht mehr Mathematik in Anspruch, als bisher ohnehin schon in jedem Gymnasium gelehrt worden ist, und das fünfte Kapitel, worin die Eigenschaften des Lichtes, wie sie bis zu Anfang dieses Jahrhunderts bekannt geworden waren, zur Sprache kommen, verlangt kaum eine größere Kenntniß von der Trigonometrie, als sie sich der Zuhörer im Laufe von wenig Wochen leicht aneignen kann. So geringe mathematische Vorkenntnisse aber muß man ohne Zweifel von Allen verlangen, die sich einigermaßen klare Begriffe von dem Wirken der Natur verschaffen wollen, auch von solchen, die an den Gymnasien noch keine Gelegenheit hatten, die ersten Gründe der Trigonometrie kennen zu lernen, wofür indessen durch die neuesten Anordnungen unserer obersten Schulstellen eine anerkennungswerthe Sorge getragen worden ist.

Der bis hierher aufgezählte Stoff ist bestimmt, die beiden der Physik zugewiesenen Semester auszufüllen. Was noch im letzten Kapitel dieses Compendiums über Undulationstheorie gesagt worden ist, hat zur Bestimmung, einen Leitfaden für Diejenigen herzugeben, welche meinen Vorlesungen über Lichtwellenlehre, die ich immer im darauf folgenden Jahre zu halten mir vorgenommen habe, beizuwohnen Lust in sich tragen. Diese setzen etwas mehr Mathematik voraus.

Uebrigens benütze ich die mir dargebotene Gelegenheit auf's Neue dazu, meinen jungen Freunden das Studium einer geisterhebenden, lebensfrischen Mathematik angelegentlichst zu empfehlen. Man kann zwar ohne eine solche Mathematik einen Gegenstand auf eine, wie man sich auszudrücken pflegt, sehr geistreiche Weise besprechen lernen; aber man kann nicht ohne sie Etwas, wenn es einigermaßen zusammengesetzter Art ist, auf eine von dessen eigenster Natur geforderte, innerlich zusammenhaltende Weise überdenken lernen. Man gehe die verschiedenen Kapitel der Naturlehre durch und überzeuge sich mit eigenen Augen, wie unzusammenhängend und unerquicklich

diejenigen ihrer Abschnitte, in welchen die Mathematik noch keinen festen Fuß gefaßt hat, in Vergleich zu jenen sind, in denen der mathematische Vortrag die Oberhand gewonnen hat. Diese meine Anempfehlung des mathematischen Studiums erhält um so mehr Gewicht, weil heut zu Tage mehr als je der Gang der Wissenschaft auch von den höchsten Regionen aus beobachtet wird und nur das strenge Wissen sich zur vollen Geltung emporarbeiten wird, indem nur es heilbringend und unvergänglich ist.

Es bleiben mir noch diejenigen Stellen meines Compendiums hervorzuheben übrig, wodurch sich dasselbe von andern ähnlichen Schriften unterscheidet, und die den Sachkenner am meisten interessiren dürften.

1) Die statischen Lehren habe ich nach Poinsot in einer Weise vorgetragen, wodurch sich die möglichen Einwirkungsweisen von Kräften auf einen festen Körper vollständig überschauen lassen, was die eigentliche Aufgabe der Physik zu sein scheint. Die Anwendung dieser Lehren auf besondere Fälle wird darum nicht minder leicht als zuvor.

2) Von der Bewegungslehre habe ich in höchst elementarer und darum leichtfaßlicher Weise so viel gegeben, als zur Beurtheilung der meisten Bewegungserscheinungen in der Natur erforderlich ist, ohne, wie ich mir schmeichle, der Gründlichkeit irgend etwas vergeben zu haben.

3) Die Theorie der Luftpumpen ist von mir in einer etwas allgemeinern Weise gegeben worden, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, wodurch ich solchen, die sich mit der Verfertigung oder dem Gebrauche dieses Instruments abgeben, einen Dienst geleistet zu haben glaube, indem durch die von mir gegebene Berechnung der Luftpumpe eine mehr in's Einzelne gehende Beurtheilung des so wichtigen und so selten guten Werkzeuges möglich wird, als bisher.

4) Die Gründe des Höhenmessens mit dem Barometer habe ich in einer gänzlich elementaren Weise auseinander gesetzt, und dabei auf ein Versehen aufmerksam gemacht, welches sich bis jetzt in

alle Arbeiten dieser Art eingeschlichen hat. Es bleibt eine geschichtliche Revision dieser Messungen zu wünschen übrig. Meine Formeln geben die Höhe stets größer als die bisherigen, was wirklich ausgeführte Höhenmessungen mit dem Barometer, verglichen mit den trigonometrischen Messungen, ganz seltene Fälle abgerechnet, in der That auch zu verlangen scheinen.

5) Die Hauptlehren des Galvanismus findet man in diesem Compendium auf eine sehr kurze und doch gründliche Weise entwickelt, wodurch ich mir den Beifall Vieler zu erwerben hoffe.

6) Die größte Abweichung von ähnlichen Schriften wird man in den beiden Kapiteln finden, welche vom Lichte handeln. Ich bin für die Mühe, welche mir dieser Abschnitt verursacht, hinlänglich belohnt, wenn durch ihn meine Leser in den Stand gesetzt werden, das über denselben Gegenstand in andern Büchern weitläufiger Gesagte besser zu verstehen und selbstständiger zu beurtheilen.

Obgleich ich die vorstehenden Punkte entschieden für Vorzüge in meinem Werkchen halte, so wird es doch, schon der Eile wegen, in der es entstanden ist, noch Unvollkommenheiten genug in sich enthalten, um auf die Nachsicht seiner Beurtheiler rechnen zu müssen. Ich für meine Person habe jedoch, vielleicht auf Kosten meiner Gesundheit, gethan, was mir unter den gegebenen Umständen zu thun möglich war.

Ostern 1854.

Dr. G. S. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß.

Einleitung in die Physik.

Allgemeine Physik.

Kapitel I.

Bestimmung der Größe eines Körpers.

Kapitel II.

Zusammensetzung der Kräfte in festen Körpern.

Kapitel III.

Von der Art, wie feste Körper in Bewegung kommen.

Kapitel IV.

Von der Art, wie sich Kräfte in flüssigen Körpern mit einander vereinigen.

Kapitel V.

Wirkungen der Schwere in festen Körpern.

Kapitel VI.

Wirkungen der Schwere in flüssigen Körpern.

Kapitel VII.

Vom Verhalten der festen Körper in flüssigen.

Kapitel VIII.

Von der Bewegung schwerer, flüssiger Körper.

Kapitel IX.

Von den Hindernissen der Bewegung.

Kapitel X.

Von den Schwingungen in einem Körper.

Besondere Physik.

Kapitel I.

Von der Wärme.

Kapitel II.

Von den vor Entdeckung des Galvanismus bekannten magnetischen Erscheinungen.

Kapitel III.

Von den vor Entdeckung des Galvanismus bekannten electrischen Erscheinungen.

Kapitel IV.

Vom Galvanismus.

Kapitel V.

Von den bis zur Entdeckung der Interferenz und Polarisation bekannten Eigenschaften des Lichtes.

Kapitel VI.

Neue, bis 1800 fast ganz verborgen gebliebene Eigenschaften des Lichtes, und daraus allmälig sich entwickelnde, bessere Einsicht in die Natur des Lichtes selber.

Einleitung zur Physik.

§. 1. Eintheilung der Naturwissenschaft.

Wir müssen vor Allem den Standpunkt unserer Wissenschaft unter den übrigen bezeichnen.

Der Mensch und ohne Zweifel auch das Thier im Allgemeinen stellt sich allen andern außer ihm vorhandenen Dingen gegenüber; er nimmt in sich sowohl wie außer sich eine gewisse Summe von Erscheinungen gewahr. Jene wird Innenwelt, diese Außenwelt genannt.

Was in der Innenwelt als ein besonderer Gegenstand erscheint, wird Innending, sowie Außending jeder in der Außenwelt auftretende genannt. Der Mensch wird bald gewahr, daß die Gegenstände einer jeden Art nicht unverbunden und theilnahmlos neben einander bestehen, sondern fortwährend auf einander einwirken und gegenseitig in einander durch alle Zeit hindurch andauernde Veränderungen bewirken, wodurch sich an ihnen eine Art von Lebenslauf wahrnehmen läßt. Die Totalität solcher Lebensläufe pflegt man mit dem Namen Natur zu bezeichnen, woraus sich die Bedeutung von innerer und äußerer Natur von selbst ergibt. Die Summe aller in Betreff der Natur successive erlangten Kenntnisse heißt:

Naturwissenschaft.

Die innere Natur eines anschauenden und in bestimmter Weite denkenden Geschöpfes nennt man dessen Seele und deßhalb wird auch das Wissen um die innere Natur eines solchen Geschöpfes

Seelenwissenschaft

genannt und dieses Wort ausschließlich ihm zugewiesen, so daß die Benennung Naturwissenschaft allein auf die äußere Natur bezogen zu werden pflegt. Die innere sowohl wie die äußere Natur fließen in einen gemeinschaftlichen Ursprung zusammen, in dem von uns Würmern unbegriffenen und unbegreifbaren

Weltenschöpfer.

Die unermeßliche Menge von Kenntnissen, welche in Betreff der Natur gesammelt werden kann und theilweise schon gesammelt worden ist, macht es nothwendig, deren Wissenschaft in Fächer abzutheilen, um einen leichtern Ueberblick gewinnen zu können; man zerlegt daher die Naturwissenschaft

zunächst in zwei Theile, denen man die Benennungen Naturbeschreibung und Naturlehre gibt, und weist dem erstern Theile alles Das zu, was erforderlich ist, um das einem jeden Außendinge trotz der ununterbrochenen Veränderungen, die in ihm vorfallen, doch zu Grunde liegende unwandelbare Substrat kennen und von den Substraten aller übrigen Außendinge unterscheiden zu lernen, während man dem zweiten Theile alles das zuweist, was die gegenseitige Einwirkung dieser Substrate aufeinander und die daraus an ihnen entspringenden Veränderungen selbst angeht. Die an den Substraten der Außendinge vor sich gehenden Erscheinungen werden Naturerscheinungen genannt, weshalb man die Naturlehre auch als das Wissen um die Naturerscheinungen bezeichnen kann.

Die Außendinge spalten sich in körperliche und unkörperliche. Körperlich nennen wir diejenigen Außendinge, welche nicht gleichzeitig einen und denselben Ort einnehmen können und wir bezeichnen diese Eigenschaft der körperlichen Dinge durch das Wort Undurchdringlichkeit; unkörperlich oder körperlos hingegen nennen wir die Außendinge, an denen wir das Vermögen der Undurchdringlichkeit nicht wahrnehmen können, wie z. B. am Schatten, an den zur Wirkungslosigkeit vereinigten Electricitäten.

Unter Kraft und Materie verstehen wir die zwei Seiten eines jeden Körpers, womit er auf andere einzuwirken vermag, und wodurch andere auf ihn einwirken können.

Die Körper stellen sich uns als feste oder flüssige dar. Feste werden solche genannt, deren Theile sich nicht ohne Anwendung einer äußern Ursache von meßbarer Größe gegen einander verstellen, mit andern Worten, verschieben lassen; flüssige hingegen sind solche, deren Theile sich durch jede noch so geringfügige Ursache gegen einander verschieben lassen. Die flüssigen theilen sich wieder in zwei Arten ab: in die wasserartig- und in die luftförmig-flüssigen. Diese lassen sich durch jeden äußern Druck in einen merklich kleineren Raum einengen, bei jenen kann ein sehr großer äußerer Druck kaum eine merkliche Raumeinengung zu Stande bringen.

Diese verschiedenen Arten in dem Sein der Körper hat man jedoch zu keiner weitern Abzweigung für die Naturwissenschaft benützt, schon deßwegen, weil ein und derselbe Körper unter veränderten Umständen jeden von jenen drei Zuständen, die man eben deßwegen die verschiedenen Aggregatzustände eines Körpers nennt, annehmen kann. Sie werden höchstens zu einer Unterabtheilung in den letzten Zweigen benützt; aber die Körper bieten noch einen andern Unterschied dar, der zu einer Hauptabtheilung ungleich geschickter ist. An sehr vielen Körpern wird man besondere Vorrichtungen gewahr, durch die sie fähig werden, mit ihrer Umgebung in eine ungleich kräftigere Wechselwirkung zu treten (durch die sie gewissermaßen in den Stand gesetzt werden, sich ihre Umgebung zinsbar zu machen), als ohne sie der Fall wäre. Solche

Vorrichtungen, wie Wurzeln, Blätter, Sinneswerkzeuge, nennt man Organe, und die Körper, welche sie besitzen, organische, so wie die, an denen man keine solchen Vorrichtungen bemerkt, anorganische. Diesem Unterschiede entsprechend stellt man eine Beschreibung der anorganischen Körper und eine Beschreibung der organischen Körper, so wie eine Lehre der unorganischen Körper und eine Lehre der organischen Körper auf.

Die organischen Körper zerfallen wieder in zwei wesentlich von einander verschiedene Klassen: in solche, die ohne äußeren Zwang ihren Ort nicht mit andern Orten vertauschen können, Pflanzen, und in solche, die aus freien Stücken ihren Ort mit andern Orten vertauschen können, Thiere. Hiernach hat man eine Beschreibung der Pflanzen und eine Beschreibung der Thiere, so wie auch eine Lehre der Pflanzen und eine Lehre der Thiere.

Das Bedürfniß unsers Geistes, das von ihm aufzunehmende Wissen möglichst in einzelne Gruppen abzusondern, in Verbindung mit der unendlichen Menge der an unorganischen Körpern wahrnehmbaren Eigenschaften, hat noch zu einer Unterabtheilung der Naturlehre des Anorganischen Anlaß gegeben, nämlich in einen Theil, der die generellen Eigenschaften der Körper in sich aufnimmt, und in einen zweiten Theil, der die speciellen und individuellen Eigenschaften der Körper sich zum Gegenstande nimmt.

Schema.

Naturwissenschaft:

Beschreibung			Lehre			
des Unorganischen.	des Organischen		des Anorganischen		des Organischen	
	der Pflanzen.	der Thiere.	nach seinen generellen Eigenschaften.	nach seinen speciellen u. individuellen Eigenschaften.	der Pflanzen.	der Thiere.

Die Beschreibung des Unorganischen hat den Namen Mineralogie, die der Pflanzen den Botanik, die der Thiere den Zoologie erhalten. Die Lehre der generellen Eigenschaften des Anorganischen hat den Namen Physik, die der speciellen und individuellen Eigenschaften den Chemie erhalten; und wenn von einer Pflanzen- oder Thier-Chemie die Rede ist, so werden in ihr die Bestandtheile der Organe doch nur als anorganische Stoffe ins Auge gefaßt. Statt des deutschen Wortes Lehre pflegt man bei Pflanzen und Thieren lieber das griechische Physiologie zu setzen, um damit gleichsam anzudeuten, daß es sich in ihr hauptsächlich nur um die Functionen der Organe handelt. Sieht man von diesen Lebensäußerungen ab, so tritt die Pflanze, das Thier wieder in das Reich des Anorganischen zurück.

1*

§. 2. Stufen des Erfahrungswissens und allgemeine Eigenschaften der Körper.

Es gibt in der Physik wie in jeder anderen Erfahrungslehre mehrere Grade des Wissens, von denen jeder folgende die vorhergehenden involvirt:

Erster Grad.

Bekanntschaft mit einzelnen Erscheinungen unter Angabe ihrer Ursachen, d. h. dessen, wodurch sie veranlaßt werden. Die blose Anzeige einer Erscheinung ohne Kenntniß ihrer Ursachen ist blos ein Datum der Geschichte, kein Datum der Naturlehre.

Zweiter Grad.

Bestimmung der Abhängigkeit der Erscheinungen ihrer Stärke nach von den Umständen, unter welchen die sie verursachenden Gegenstände sich befinden, durch Versuche. Hierbei treten die zur Bequemlichkeit und Genauigkeit der Versuche erforderlichen Apparate und Sammlungen von Apparaten auf. Solche Versuche geben als Resultat Maaßbestimmungen in Tabellenform. Dieser Grad des Wissens ist zum Mindesten erforderlich, wenn es sich darum handelt, daß Erscheinungen von verlangter Stärke zu gewissen Zwecken hervorgerufen werden sollen, d. h. wenn das Wissen eine Anwendung auf's Leben soll finden können.

Dritter Grad.

Auffindung von Gesetzen, von denen jedes einzelne die sämmtlichen Resultate einer ganzen Tabelle in sich begreift. Ein solches Gesetz ist um so gesicherter, je inniger es mit den Ergebnissen der Versuche übereinstimmt und je sorgfältiger diese selbst den Gegenstand ergründet haben.

Völlig gesichert indessen ist es nur dann, wenn man sich die volle Ueberzeugung verschafft hat, daß es auch noch weit über die Grenzen der Tabelle hinaus wahr bleibt.

Vierter Grad.

Wenn eine ganze Reihe von Gesetzen durch ein einziges höheres Gesetz, das dann ein Princip genannt wird, dargestellt werden kann. Der höchste Grad des Wissens wäre eingetreten, wenn alle einzelnen Erscheinungen innerhalb eines bestimmten Gebiets aus einem einzigen Principe hervorgelockt werden könnten. Die Principien können aus der Erfahrung genommen oder blose Hypothesen sein, deren Rechtmäßigkeit lediglich von der Vollständigkeit und Ungezwungenheit abhängt, womit sich aus ihnen der Cyclus aller einzelnen Erscheinungen, über dem sie schweben, herleiten läßt.

Alle uns bekannten Körper besitzen neben ihrer Undurchdringlichkeit noch andere allgemeine Eigenschaften, wie:

a. Gestalt und Größe;
b. Kraft und Materie;
c. Theilbarkeit und Zusammensetzbarkeit;
d. Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit;
e. Elasticität und Porosität.

ad c. Diese geht insbesondere aus der Art und Weise, wie sich feste Körper von bestimmter Form durch innern Trieb (Krystalle) aus einem zuvor flüssigen Zustande herausbilden, und wie diese wieder in den flüssigen Zustand zurückgehen, hervor.

ad d. Die Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit der Körper läßt sich schon durch Anwendung eines auf deren Theile ausgeübten äußern Drucks erkennen; besonders deutlich aber zeigt sie sich bei dem Hinzutritt oder Weggang der Wärme in oder von einem jeden Körper.

ad e. Das Vermögen der Körper, ihre durch Zwang abgeänderte Gestalt wieder herzustellen, heißt Elasticität. Alle Körper sind in gewissem, freilich oft nur geringem Grade elastisch. Unter Grenze der Elasticität versteht man die Größe der Formveränderung, welche nicht überschritten werden darf, wenn der Körper wieder ganz in seine ursprüngliche Gestalt zurückgehen soll. — Unter Porosität eines Körpers versteht man das Dasein von Zwischenräumen zwischen seinen materiellen kleinsten Theilchen, welche gestatten, daß sich die Theile anderer Körper neben jene lagern können, ohne daß dadurch die Grundeigenschaft der Undurchdringlichkeit verletzt wird. Die Poren eines Körpers sind nur erschließbar, nicht von unsern Sinnen wahrnehmbar. Zwischenräume, die sich sinnlich wahrnehmen lassen, sind Löcher im Innern eines Körpers, die die Benennung Poren nicht verdienen.

Bei den flüssigen Körpern, die eine Verschiebbarkeit ihrer Theile durch die geringste Kraft gestatten, sind nicht Grade der Flüssigkeit vorhanden; die zähflüssigen sind schon im Uebergang zu den festen begriffen. Bei den festen Körpern hingegen, die zur Verschiebbarkeit ein bestimmtes Maaß von Kraft erfordern, sind, je nach der Größe der dazu erforderlichen Kraft, Unterschiede wahrnehmbar, welche durch die Beiwörter:

härter oder weicher

bezeichnet werden. Außerdem lassen sich an den festen Körpern noch andere Verschiedenheiten beobachten, welche durch die Eigenschaftswörter:

zäher oder zerbrechlicher

angedeutet werden *).

Alle festen Körper nämlich zerfallen, wenn ihre Formveränderung über gewisse Grenzen hinausgetrieben wird, in Stücke, zerbrechen, weshalb wir sie

*) Unsere Sprache setzt häufig statt des Comparativs den Positiv, und denkt sich dann dem zu bestimmenden Körper ein mittleres Vergleichungs-Glied untergelegt.

um so zerbrechlicher nennen, je geringer die das Zerbrechen bewirkende Formveränderung ist, oder um so zäher, je größer die zum Zerbrechen nöthige Formveränderung ist. Die außerordentlich vielen andern Bezeichnungen, welche unsere Sprache zur Bestimmung des Verhaltens eines festen Körpers in Bezug auf dessen Gestaltsveränderung besitzt, sind lauter Zusammensetzungen aus obigen, wie: spröde, mürbe, geschmeidig. Manche hängen gleichzeitig von der Form des Körpers ab, wie z. B. biegsam. Spröde ist ein Körper, wenn er die Eigenschaft der Härte mit der der Zerbrechlichkeit verbindet; mürbe, wenn er die Eigenschaft der Weichheit mit der der Zerbrechlichkeit verbindet; geschmeidig ist er, wenn er die Eigenschaft der Zähigkeit mit der des Unelastischseins in sich vereint, u. s. w.

§. 3. Verschiedene Vorstellungen der Physiker über den innern Bau der Körper, und Erfahrungs-Belege hierzu.

Die Thatsache, daß derselbe Körper bald einen größern, bald einen kleinern Raum einnimmt, ließ auf den Gedanken kommen, daß dabei zweierlei Kräfte im Spiele seien, eine, welche die Körpertheile zwingt, einander stets näher zu treten, Attraktionskraft, und eine zweite, wodurch diese Theile veranlaßt werden, sich stets weiter von einander zu entfernen, Repulsivkraft, und daß die Größe des jedesmaligen von dem Körper eingenommenen Raumes nach dem relativen Verhältnisse zwischen diesen beiden Kräften, Grundkräften, sich richte; hierbei aber gingen die Ansichten auseinander. Die einen, Dynamiker, wollten allem Streite dadurch auf einmal ein Ende machen, daß sie behaupteten, der Körper selber sei weiter nichts, als eine Verbindung dieser beiden Kräfte unter sich in einem bestimmten, durch anderweitige Umstände bedingten Verhältnisse; die anderen, Atomistiker, welche mehr Ursachen zu specifischen Verschiedenheiten der Körper sich aufbewahren wollten, nahmen an, daß jeder Körper aus unendlich kleinen und darum unsichtbaren Theilchen seiner Art von unveränderlicher Größe und Gestalt, Atomen, zusammengesetzt sei, und daß zwischen diesen Atomen das Spiel jener beiden Grundkräfte eingeleitet werde, in Folge dessen der Abstand der Atome von einander in dem Körper durch das jedesmalige Verhältniß der beiden Grundkräfte in den Atomen und durch die Größe sowohl als Gestalt und gegenseitige Lage dieser Atome bestimmt werde.

Auch abgesehen davon, daß es schwer zu begreifen ist, wie eine Kraft wirksam werden könne, ohne ein Etwas, an dem sie wirkt, war die Vorstellung der Dynamiker doch gar zu nackt, um der Hoffnung Raum zu geben, daß sich aus ihr die unendlich vielen, in der Natur vorhandenen Modificationen der Erscheinungen würden ableiten lassen. In der That wurden auch jene naturphilosophischen Schulen, aus denen die Dynamiker hervorgegangen

waren, zur Todesstille gezwungen, nachdem die experimentirende Physik in der Lehre vom Licht und von der Elektricität — die Chemie in der verschiedenartigen Existenz solcher Körper, die aus einerlei Bestandtheilen in denselben Verhältnissen zusammengesetzt sind, eine Unzahl neuer Thatsachen ans Licht gezogen hatte. Heut zu Tage existiren im Ernste keine Dynamiker mehr in dem hier oben angedeuteten Sinne.

Die in der Chemie beobachtete Vereinigung mehrerer verschiedenartiger Körper unter sich zu neuen Körpern, in welchen sich die Bestandtheile, aus denen sie hervorgegangen sind, auf keine Weise mehr unsern Sinnen offenbaren, zwang weiter zu der Annahme, daß in den Körpern verschiedenartige Atome, in Gruppen vereinigt, gleichzeitig vorhanden sind. Solche Gruppen von Atomen bezeichnet man zum Unterschiede von einem einzigen Atom durch das Wort Molecül oder Massentheil. Molecüle, welche aus denselben Atomen in gleicher Anzahl zusammengesetzt sind, können sich noch durch ihre Gruppirungsweise von einander unterscheiden und dadurch Anlaß geben, daß Verbindungen aus den gleichen Bestandtheilen unseren Sinnen in verschiedener Weise entgegentreten können. Solche mehrförmige Verbindungen aus denselben einfacheren Körpern fand man nicht blos da auf, wo sich diese in verschiedenen Verhältnissen unter sich vereinigen und dann nothwendigerweise verschiedenartige Verbindungen hervorrufen, sondern selbst da, wo das Verhältniß der sich mit einander vereinigenden Bestandtheile das gleiche bleibt. Jene Grundkräfte, wodurch die Atome in den Molecülen oder in den Körpern in ihrer gegenseitigen Stellung zu einander erhalten werden, heißen auch Molecularkräfte.

Das Resultat der im Innern eines Körpers wirksamen Kräfte, in Folge dessen derselbe einer von außen auf ihn eindringenden Abänderung seines Seins bis auf einen seine Natur ausmachenden Punkt hin entgegen zu treten fähig ist, drücken wir durch das Wort Cohäsion aus. Die Cohäsion ist ableitbar aus der Größe, Gestalt und Lage der Atome und aus den an ihnen wirkenden Kräften; da wir aber von allen diesen Elementen, woraus die verschiedenen Körper bestehen, so gut wie gar nichts wissen, so bleibt uns nichts anders übrig, als auf eine solche Ableitung Verzicht zu leisten, und uns damit zu begnügen, sie als ein Datum der Erfahrung hinzunehmen, aus dem wir vielleicht die allgemeinste Natur der Molecularkräfte zu erschließen vermögen. Was uns zuerst in dieser Beziehung durch die Beobachtung entgegengeführt wird, ist der Umstand, daß diese Kräfte nur in unsinnlich kleinen Entfernungen ein Resultat von merklicher Größe hervorzurufen im Stande zu sein scheinen. Ein Glas von mäßiger Dimension, das man mit beiden Händen zu zerreißen sucht, widersteht seiner Zerstückelung mit großer Gewalt und zeigt dadurch, daß die Cohäsion zwischen seinen nächsten Molecülen eine sehr beträchtliche ist; bringt man es aber

endlich auf diese Weise oder durch einen Schlag auf dasselbe dahin, daß es in zwei oder mehrere Theile zerfällt, und fügt man dann diese Theile möglichst wieder so aneinander, wie sie zuvor beisammen waren, so werden sie bei weitem nicht mehr mit derselben Kraft aneinander hängen bleiben, wie vor dem Bruche. Da nun hier vorher und nachher alle Umstände die gleichen sind, bis etwa auf die Stäubchen, die sich an die Bruchflächen angehängt haben, oder die geringen Formveränderungen, welche eine durch ungleiche Abkühlung im Glase gebildete Spannung vielleicht zur Folge hatte, so beweist dies, daß so äußerst kleine, in vielen Fällen durch unsere Sinne gar nicht ergreifbare Abänderungen in den Abständen nächster Molecüle hinreichen, um deren Cohäsion fast ganz und gar aufzuheben. Man könnte hiergegen zwar einwenden, daß durch den Bruch die Kräfte der Molecüle selber an den Bruchflächen abgeändert worden sein könnten; allein gegen diese Annahme erheben sich andere Erfahrungen. Sägt man ein massives Stück Blei entzwei und fügt man die Schnittflächen wieder genau an einander, so werden die beiden Stücke, wie zuvor beim Glase, nur zu geringem oder zu gar keinem Haften an einander gebracht werden können; hämmert man aber die beiden Theile gegen einander, wodurch die Grenz-Molecüle gewaltsam einander näher gebracht werden, so findet man, daß sie wieder ihr Beisammensein mit großer Kraft behaupten. Die gleiche Erscheinung läßt sich auch an Wachs und andern weichen festen Körpern wahrnehmen. Hierauf stützt sich auch die Besonderheit des **Knetens**.

Arbeitet man die Grenzflächen zweier verschiedener fester Körper so aneinander ab, daß deren Molecüle sich einander schier bis zur Berührung nähern können, so entwickelt sich zwischen den beiden Körpern eine Anziehung von beträchtlicher Größe, die unter den jetzigen Umständen **Adhäsion** genannt zu werden pflegt. Eine solche Adhäsion stellt sich nicht blos zwischen zwei festen Körpern, sondern eben so auch zwischen einem festen und einem flüssigen, oder zwischen zwei flüssigen Körpern ein. Das Flüssigsein oder mindestens eine große Weichheit des einen von beiden Körpern begünstigt ihr starkes Adhäriren, indem es das möglichst nahe Zusammentreten ihrer Grenz-Molecüle erleichtert. Hieraus erklärt sich das Kleistern, Leimen, Löthen, und andere auf die Adhäsion sich gründende Verrichtungen.

§. 4. Kapillarerscheinungen.

Unter die Wirkungen der Adhäsion ist die ganze Reihe der sogenannten **Kapillarerscheinungen** zu rechnen. Der einfachste Fall davon zeigt sich, wenn ein fester Körper in einen flüssigen eingetaucht und später wieder herausgezogen wird. Der Erfolg wird ein doppelter sein. Es bleibt entweder eine dünne Schicht von der Flüssigkeit an dem aus ihr gezogenen festen Kör-

per hängen oder nicht. Ersteres geschieht offenbar, wenn die Adhäsion zwischen dem festen Körper und der Flüssigkeit größer ist, als die Cohäsion zwischen den Theilen der Flüssigkeit unter sich; letzteres hingegen, wenn die Adhäsion von geringerem Belange ist, als die Cohäsion. Für diese Auslegung jenes doppelten Erfolges spricht die Thatsache, daß zwei Platten von gleicher Größe und aus verschiedenen festen Körpern gebildet, die man horizontal an dem einen Arm einer Wage aufhängt und an ihr ins Gleichgewicht bringt, sodann aber mit der Oberfläche einer und derselben Flüssigkeit in Berührung kommen läßt, gleiches Gewicht zu ihrem Abreißen verlangen, wenn sie sämmtlich von der Flüssigkeit benetzt werden, hingegen ungleiches, wenn die eine benetzt wird, die andere nicht, oder wenn beide nicht benetzt werden. Ebenso findet man Unterschiede, wenn beide Platten mit verschiedenen Flüssigkeiten in Berührung kommen und jede Platte von der sie berührenden Flüssigkeit benetzt wird.

Eine andere auf denselben Ursachen ruhende Klasse von Erscheinungen ist die, daß die Flüssigkeiten an den Wänden von festen Körpern, die vertical in sie eingetaucht werden, sich in der Nähe dieser Wände in die Höhe hinauf ziehen oder in die Tiefe hinabsenken; ersteres geschieht oder letzteres, je nachdem die Wände von den Flüssigkeiten benetzt werden oder nicht.

Eine dritte Art solcher Erscheinungen beobachtet man an sehr engen Glasröhren, Haarröhrchen. In ihnen zieht sich, wenn sie in eine Flüssigkeit getaucht werden, die in der Röhre befindliche Flüssigkeitssäule über das Niveau der äußeren Flüssigkeit hinauf oder unter dasselbe hinab, je nachdem die Röhrenwände von der Flüssigkeit benetzt werden oder nicht. Hierbei macht sich das sehr einfache Gesetz mit hinlänglicher Genauigkeit geltend, daß die Höhen dieser Säulen über oder unter dem Niveau sich umgekehrt wie die Durchmesser der Röhren verhalten, wenn diese aus einerlei Stoff genommen und in die gleiche Flüssigkeit eingetaucht worden sind.

Zwischen zwei parallelen Platten, deren Abstand dem Durchmesser der Röhre gleich ist, wird die Höhe der Flüssigkeitssäule gerade halb so groß wie in der Röhre; daher kommt es, daß in zweien gegen einander geneigten Platten, deren Durchschnittlinie eine lothrechte Stellung in der Flüssigkeit hat, die Höhe der zwischen ihnen befindlichen Flüssigkeitssäule um so geringer wird, je weiter sich die Platten von einander entfernen. Eine Folge hievon ist, daß die Oberfläche der Säule die Form einer Hyperbel annimmt.

Aus den gleichen Ursachen lassen sich auch mancherlei Bewegungen erklären, wie: die Bewegung von Tropfen zwischen zwei wenig gegen einander geneigten Glasplatten; die Anziehung zwischen zwei auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körperchen, wenn beide von der Flüssigkeit benetzt werden, oder beide nicht; deren Abstoßung, wenn das eine Körperchen von der Flüssigkeit

benetzt wird, das andere nicht. Alle dergleichen Erscheinungen sind von Laplace in sehr einfacher und allgemeiner Weise auf eine einzige Formel zurückgeführt worden, wie man in Biot's Traité de Physique T. I. pag. 437 nachlesen kann.

Alle vorstehenden Kapillarerscheinungen sind gar sehr geeignet, den ungeheuren Einfluß der geringsten Aenderungen in den Entfernungen der Atome auf die Stärke der Adhäsion kennen zu lernen; sie verlangen eben deßwegen zu ihrem Gelingen eine sehr große Reinlichkeit. Das offene Liegenlassen der Glaswände, das Betasten derselben mit der Hand und eben so das Ueberziehen derselben mit der dünnsten Schicht eines fremden Körpers kann deren Wirkung stark abändern, ja sogar umkehren und in die des überziehenden Körpers umwandeln, woraus man sieht, daß die Adhäsionswirkung schon in jeder noch so kleinen Entfernung alle ihre Kraft verliert.

Die besondere Natur der Cohäsions- und Adhäsionskräfte macht sich auch im Chemismus geltend. Wenn von zwei neben einander liegenden Körpern ein Bestandtheil des einen an einen Bestandtheil des andern übergehen soll, so müssen begreiflicherweise die Cohäsionskräfte zwischen den Bestandtheilen eines jeden Körpers durch die an den Grenzen beider thätigen Adhäsionskräfte überwunden werden. Dazu aber ist im Allgemeinen erforderlich, daß die Adhäsion zwischen den beiden Körpern in beträchtlicher Stärke auftrete, was aber nur dann der Fall sein wird, wenn wenigstens der eine von den beiden Körpern ein flüssiger ist. Aus dieser Wahrnehmung ging der schon von den ältern Chemikern ausgesprochene Grundsatz hervor: corpora non agunt, nisi fluida. Es ist zwar schwer einzusehen, wie in lauter unter sich völlig gleichen und mit einerlei Kraft versehenen Atomen, wie wir sie uns doch in den sogenannten einfachen Stoffen augenfällig denken müssen, ein Zusammenhalt sich bilden könne, der bei der Vereinigung von mehreren unter einander zu chemisch neuen Körpern zu überwinden wäre; der Wegfall einer zu überwindenden Cohäsion bei diesen Körpern würde dann aber das Auftreten einer starken Adhäsion zu ihrer gegenseitigen Vereinigung nicht mehr als absolute Bedingung erscheinen lassen, und dann fände auf sie der obige Grundsatz keine Anwendung mehr, weil sie ihrer Natur nach immer luftförmig flüssig wären. Es zeigt sich uns jedoch in manchen Körpern, die wir für einfache Stoffe ansehen, thatsächlich ein beträchtlicher Zusammenhalt zwischen ihren kleinsten Theilen, wie in der Kohle, dem Phosphor, dem Schwefel, den Metallen; deßwegen müssen wir obigen Grundsatz auch auf die von uns für einfache Stoffe gehaltenen Körper ausdehnen, und die Ursache, warum in solchen eine wahrnehmbare Anziehung zwischen ihren Theilen stattfinden könne, als noch unerforscht hinstellen, wenn wir nicht lieber deren Zusammengesetztheit aus dieser Art ihres Bestehens prophezeien wollen.

Die Adhäsions- und Cohäsionskräfte sind es ohne Zweifel auch, welche in jenen Erscheinungen thätig sind, denen man die Benennung der Endosmose gegeben hat, und die darin bestehen, daß zwei verschiedenartige Flüssigkeiten, welche durch eine poröse Scheidewand, wie z. B. die thierische Blase ist, von einander getrennt gehalten werden, durch deren Kanäle sie einzeln genommen unter gewöhnlichen Umständen nicht hindurch dringen können, durch die blose Gegenwart der zu beiden Seiten der Scheidewand befindlichen verschiedenartigen Flüssigkeiten aber in einander überzugehen veranlaßt werden. Dieser Uebergang ist zwar in der Regel nicht gleich groß, in Bezug auf jede der beiden Flüssigkeiten, nimmt aber doch nicht eher ein Ende, als bis beide sich gleichmäßig mit einander vermischt haben.

Es scheinen hierbei die Adhäsionskräfte zwischen den Wänden der Kanäle und den beiden Flüssigkeiten, gleichzeitig aber auch die Cohäsionskräfte zwischen den Theilchen dieser letzteren mitzuwirken. Die Flüssigkeitstheile treten von beiden Seiten in die Haarröhrchen der thierischen Blase bis zur Berührung ein und ziehen sich einander an; weil aber die Flüssigkeiten zu beiden Seiten eine ungleiche Natur haben und dem zur Folge deren Adhäsion an den Kanalwänden von ungleicher Größe ist, aus welcher Ungleichheit ein verschiedenes Bestreben in jeder Flüssigkeit entspringt, sich längs der Kanäle fortzubewegen, so ist mit dieser Ungleichheit der Fortbewegung ein ungleicher Uebergang der auf beiden Seiten befindlichen Flüssigkeiten auf so lange wenigstens verbunden, als der ungleiche Druck die Cohäsion zwischen den beiden Flüssigkeiten zu überwinden im Stande ist.

§. 5. Fortgesetzte Betrachtung der Molecularkräfte.

Wir haben schon früher aus dem allgemeinsten Verhalten der Körper die Folgerung gezogen, daß dieselben aus getrennt von einander liegenden, unwahrnehmbar-kleinen unveränderlichen Theilchen (Atomen) bestehen müssen, die mit anziehenden und abstoßenden Kräften versehen sind, durch welche sie in bestimmten gegenseitigen Abständen von einander erhalten werden und daß diese Kräfte nur auf unsinnlich kleine Entfernungen eine Wirkung von bedeutender Größe äußern, auf jede, wenn auch noch so kleine meßbare Entfernung aber der Wahrnehmung sich ganz und gar entziehen.

Um weitere Eigenschaften der Molecularkräfte bequem besprechen zu können, sehen wir uns veranlaßt, nachstehende Benennungen einzuführen. Die Summe der in den Atomen eines Körpers enthaltenen Materie, d. h. dessen, was eine Kraft in sich aufzunehmen fähig ist, heißt seine Masse, und die Größe des Raumes, worüber diese Masse verbreitet ist, sein Volumen, und unter Dichtigkeit des Körpers versteht man das Verhältniß seiner

Masse zu seinem Volumen. Es gibt viele Thatsachen, aus denen sich die ungleiche Vertheilung der Masse eines Körpers und damit auch seiner Kräfte nach verschiedenen Richtungen hin erschließen läßt, wie z. B. die verschiedenen Blätterdurchgänge in Krystallen und die Fähigkeit solcher Krystalle, ein gewaltsam aus ihnen herausgerissenes Stück, wenn sie in ihre Auflösung zurückgebracht werden, selbstthätig wieder auszufüllen, und auf solche Weise die von ihrer Natur geforderte Gestalt vollständig wieder herzustellen. In der That scheint die Annahme einer ungleichen Vertheilung der Masse eines Körpers nach den verschiedenen Richtungen hin, was mit einer verschiedenen Anordnung der Atome längs dieser Richtungen auf Eins hinausläuft, den Schlüssel zur Erklärung einer Menge von Erscheinungen herzugeben, die uns außerdem unbegreiflich bleiben müßten.

Die gemeinsten Thatsachen geben zu verstehen, daß die Cohäsion somit die Molecularkräfte, aus denen diese hervorgeht, in ungleich größerem Maaße wirksam ist, als die Schwere, namentlich wenn man bei dieser Vergleichung den Unterschied in den Größen und Entfernungen der auf einander wirkenden Gegenstände in Anschlag bringen will. Es bleibt somit nichts anders übrig, als entweder anzunehmen, daß beiderlei Kräfte von gänzlich verschiedener Art sind, oder zu der andern Annahme zu flüchten, daß die Cohäsion als Summe von entgegengesetzten Wirkungen aufgefaßt werden müsse, während in die Schwere nur deren Differenz eingehe. Verlangt man ein Bild von einer solchen möglichen inneren Constitution eines Körpers, so würde eine Reihe sehr kleiner, um ihre Mittelpunkte frei beweglicher, längs einer im magnetischen Meridian liegenden geraden Linie aufgehängter Magnete, die sich mit ihren entgegengesetzten Polen einander gegenüber ständen, ein solches liefern. Wird die Richtung eines von diesen Magnetchen abgeändert, so nehmen alle übrigen von selber sehr großen Antheil an dieser Veränderung, während die aus größerer Ferne wirkenden und einander nahe liegenden Pole eines ungleich stärkeren Magnets eine verhältnißmäßig um so kleinere Wirkung auf sie äußern, je kürzer dieselben sind. Dieses Bild dient zugleich als Beispiel von der Möglichkeit des Elastischseins eines Körpers; denn hebt man die Ursache wieder auf, wodurch die Richtung des einen Magnetchens abgeändert worden ist, so treten alle Magnetchen wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Aehnlich ließen sich durch andere Anordnungen der einzelnen Theile abgeänderte Wirkungsweisen derselben hervorbringen. Man erkennt aus solchen Beispielen wenigstens die Möglichkeit, wie durch verschiedene Anordnungen der Molecüle verschiedene Eigenschaften des Körpers, den sie ausmachen, hervorgerufen werden können. Die wirkliche Anordnungsweise der Molecüle in den verschiedenen Körpern kann man erst nach erlangter genauer Kenntniß von deren specifischen Wirkungsweisen und dann noch nur mit vielen Schwierigkeiten zu erfahren hoffen. Hier genügen schon blose Möglichkeiten.

Die Summe der im Innern eines Körpers vor sich gehenden Erscheinungen zwingt zu der Annahme der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, worunter man die Eigenthümlichkeit der Materie versteht, daß jeder Atom, der einen andern zu einer Bewegung in bestimmter Richtung und von bestimmter Stärke antreibt, von diesem gegenseitig zu einer Bewegung von derselben Stärke und längs derselben Geraden angetrieben wird, deren Richtung aber die gerade entgegengesetzte von der vorigen ist. Diese Eigenthümlichkeit beobachtet man nicht nur zwischen den Atomen eines und desselben Körpers, sondern auch darüber hinaus bei Wirkungen, die von Körper zu Körper geschehen. Deßhalb stellt man die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung als ein völlig allgemeines Naturgesetz auf, das keinerlei Ausnahme erleidet.

Die bisher betrachteten Molecularkräfte wirken nie merklich auf meßbare Entfernungen über die Stelle hinaus, in der sie sich befinden. Es gibt jedoch andere Kräfte, die von Körpern zu Körpern, oft auf sehr beträchtliche Entfernungen und mit großer Stärke ihre Wirkung äußern. Man hat sich dergleichen Wirkungen von Körper zu Körper jederzeit als eine Zusammensetzung aus den Wirkungen der kleinsten Theile des einen Körpers auf die kleinsten Theile des andern Körpers vorzustellen, welche Wirkungen, obgleich jede für sich unendlich klein ist, hier doch deßhalb ein merkliches Resultat zu Stande bringen können, weil sie stets in unendlich großer Anzahl zu einer vereinigten Wirkung zusammentreten.

Zu einer genauen Einsicht in die Natur so zusammengesetzter Wirkungen ist eine genaue Kenntniß von der Zusammensetzungsweise der Theilwirkungen erforderlich, die wir uns auf eine möglichst einfache Weise zu verschaffen suchen müssen. Hierbei kommt uns der Umstand zu Statten, daß diese Zusammensetzungsweise völlig die gleiche bleibt, welcher Art auch die wirkenden Kräfte sein mögen, weshalb wir sie unabhängig von der Art der Kräfte durchzuführen vermögen. Zugleich wird es sich zeigen, daß sich bei festen Körpern unter allen Umständen die Summe von noch so viel Theilwirkungen auf eine einzige oder höchstens auf zweierlei Wirkungen zurückführen läßt, aus denen dann eine diesen zwei Kräften entsprechende Bewegung hervorgeht, die wir ebenfalls, wenigstens in ihren Grundzügen zu beurtheilen lernen müssen. In ähnlicher, jedoch wegen der hier auftretenden viel größeren Schwierigkeiten unvollkommenerer Weise werden wir uns auch über die Zusammensetzungsweise der Wirkungen in flüssigen Körpern Auskunft zu verschaffen suchen, um die in den beiderlei Körpern auftretenden Unterschiede, da, wo es Noth thut, in Anschlag bringen zu können.

Erst nachdem wir diese allgemeinen Wirkungsweisen der Kräfte erkannt haben, werden wir zur Betrachtung der besondern in der Natur aufgefundenen Kräfte übergehen.

Vor Allem aber müssen wir uns die Bestimmung der bei jeder solchen Untersuchung ins Mittel tretenden Größe der Körper angelegen sein lassen, womit wir daher in unserer Physik den Anfang machen werden. Es ist zwar die Sache der Mathematik, die Gestalt der Körper zu bestimmen und aus ihr deren Größe abzuleiten; jedoch gibt es viele Fälle, wo die Körper in so verwickelten Gestalten auftreten, daß deren scharfe mathematische Bestimmung kaum mehr möglich ist, und dann ist es vortheilhafter, deren Größe auf andern durch die Physik selber dargebotenen Wegen aufzusuchen, die eben den Inhalt unseres nächsten Paragraphen ausmachen werden.

Allgemeine Physik.

Kapitel I.

Bestimmung der Größe eines Körpers.

§. 6. Vom Calibriren.

Der Physiker sieht sich häufig in die Nothwendigkeit versetzt, die räumlichen Verhältnisse der in engen Röhren ansteigenden Flüssigkeiten, wie bei den Thermometern, bald der in weiteren Röhren aufgefangenen, wie bei Gasentwickelungen, mit einander zu vergleichen; nicht selten muß sich sogar diese Vergleichung auf die von den äußeren Oberflächen der Röhren eingenommenen Räume erstrecken, wie bei den Scalen-Aräometern. Es haben zwar solche Röhren, innen wie außen, in der Hauptsache die Cylinderform, aber die Art ihrer Anfertigung zieht so unendlich viele Abweichungen davon nach sich, daß man sich nur auf empirischem Wege von ihrem Dasein oder Nichtdasein Ueberzeugung verschaffen kann. Man nennt dieses empirische Geschäft der Raum-Vergleichungen bei Röhren ihr Calibriren; daher handeln wir

a. Vom Calibriren der inneren Räume enger Röhren.

Man stützt sich dabei auf den Erfahrungssatz, daß derselbe Körper in derselben Temperatur stets denselben Raum einnimmt. Diesem gemäß sucht man in das Innere solcher Röhren eine gewisse Quantität Quecksilber zu bringen, die nur einen Theil der ganzen Röhrenlänge einnimmt*), und verschiebt diese durch Neigen und sanftes Klopfen in solchen Strecken, daß der Anfang der Quecksilbersäule in der folgenden Lage ungefähr da sich findet, wo ihr Ende in der vorigen Lage war. Man mißt in jeder dieser Lagen die Länge der Quecksilbersäule. Findet man nun alle diese Längen gleich groß oder doch so nahe gleich, daß die Unterschiede keinen nachtheiligen Einfluß auf die Raumbestimmungen haben können, so wird man dadurch berechtigt, die

---

*) Da sich in so enge Röhren das Quecksilber nicht eingießen läßt, so wendet man man zu diesem Zwecke am besten das folgende Mittel an. Man taucht die enge Röhre in das in einer weitern Röhre befindliche Quecksilber tief genug ein, daß dieses in der engeren Röhre hoch genug ansteigt, hebt dann die enge Röhre mit verschlossenem obern Ende aus dem Quecksilber heraus, und läßt, wenn die darin hängen bleibende Menge Quecksilber zu groß erscheint, vorsichtig, so viel als nöthig, davon heraustreten.

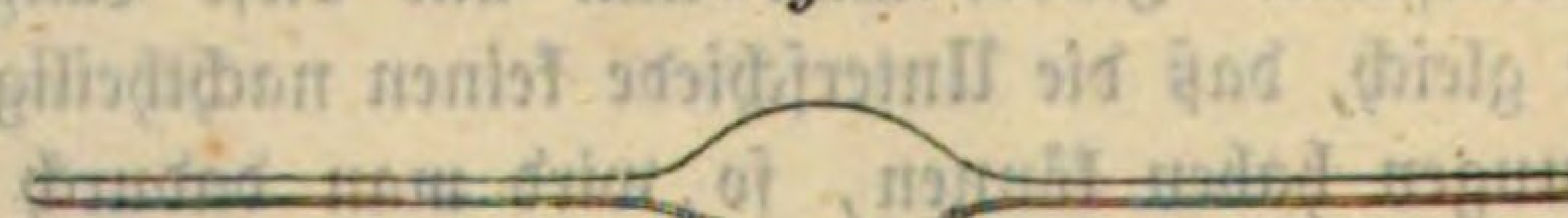
Röhrenhöhlung als überall gleichen Querschnitt habend anzusehen, und die Größen der inneren Räume ihren Längen proportional zu machen. Zeigen sich dabei plötzliche, in unregelmäßiger Art auftretende Unterschiede von beträchtlicher Größe, so hat man die Röhren als zu dergleichen Raumvergleichungen unbrauchbar zu verwerfen; findet man aber diese Unterschiede nicht sehr groß und ändern sich dieselben in ihrer Aufeinanderfolge in einer regelmäßigen Weise, so können diese Röhren doch noch zu raumvergleichenden Zwecken dienen, und man ist häufig gezwungen, dergleichen dazu zu gebrauchen, weil so regelmäßig geformte Röhren, wie die zuerst bezeichneten waren, nur sehr selten aufgefunden werden. In diesem Falle indessen wird es nothwendig, daß der die Röhre zum Werkzeug Verarbeitende die Unterschiede auf sie aufträgt, oder anderswie mit ihr bleibend vereinigt, und später auf sie bei der Anfertigung der zu diesem Werkzeuge gehörigen Scala die erforderliche Rücksicht nimmt.

Dieses Geschäft darf der Physiker im Allgemeinen nicht dem Verfertiger des Werkzeugs übertragen, weil dieser es nicht selten wegen seiner Mühsamkeit zu umgehen sucht; daher hat man auf Mittel gesonnen, dergleichen Werkzeuge, welche fertig gemacht worden sind, ohne daß man in Betreff der gehörigen Berücksichtigung der Calibrirung bei Anfertigung von deren Scalen sicher ist, auch noch nachher in dieser Beziehung prüfen zu können, worüber der Artikel „Thermometer“ in Gehler's neuem physikalischen Wörterbuch Band IX. Abth. 2. pag. 940 die erforderliche Auskunft gibt.

b. Vom Calibriren der inneren Räume weiter Röhren.

Hierbei wird wieder derselbe Erfahrungssatz benützt, wie der in a. gebrauchte, nämlich der, daß gleiche Gewichtstheile eines Körpers in derselben Temperatur einerlei Räume einnehmen. Man verschafft sich gleiche Räume Quecksilbers entweder dadurch, daß man diese Flüssigkeit successive in eine in der nachstehenden Form

Fig. 1.



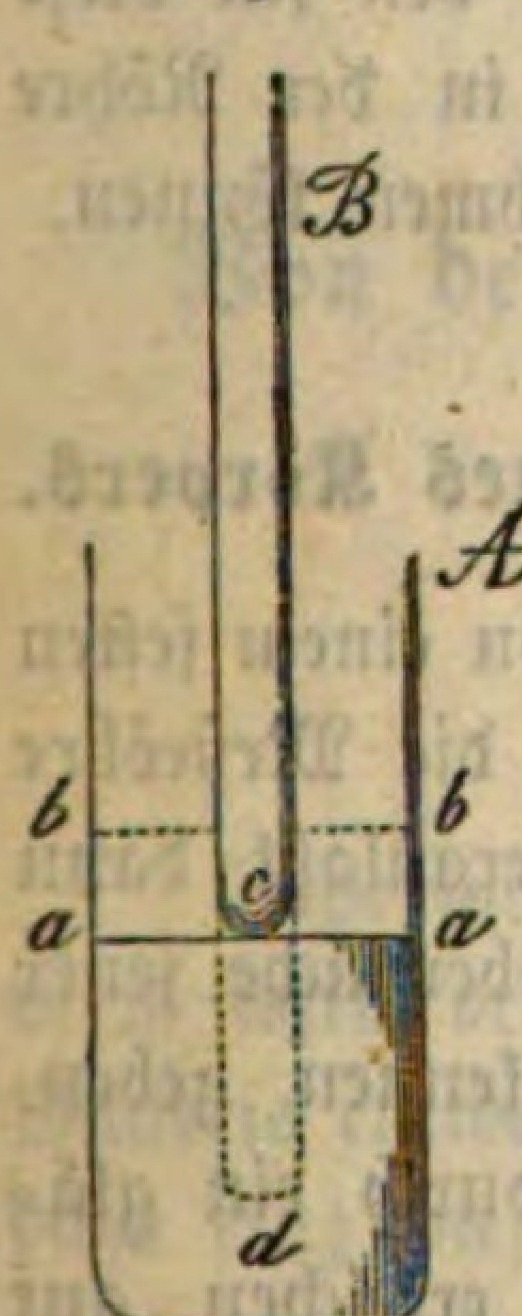
ausgezogene Glasröhre treten läßt und jedesmal in die zu calibrirende Röhre gießt, oder daß man zu diesem Zwecke immer gleiche Gewichtstheile Quecksilber in sie schüttet, und bei lothrechter Stellung der Röhre nach jedem Eingießen die Stelle möglichst genau an ihr bezeichnet, bis wohin das Quecksilber in ihr angestiegen ist. Diese Zeichen entsprechen dann gleichen inneren Räumen derselben, vorausgesetzt, daß man ihr jedesmal immer wieder die gleiche Stellung

gibt. Eine so bezeichnete Röhre heißt Meßröhre und der Physiker wie der Chemiker kommt häufig in den Fall, von dergleichen genauen Meßröhren Gebrauch zu machen. Da man das Gewicht von einem gegebenen Rauminhalte Quecksilber, z. B. einem Cubikzolle, genau erforscht hat, so kann man, wo dies Vortheil bringt, die gleichen Räume in den Meßröhren auch von jeder solchen bestimmten Größe werden lassen. Den auf solche Weise erhaltenen ersten, am zugeschmolzenen Ende der Röhre befindlichen Theil läßt man immer wie er ist, die folgenden aber kann man ihrer Länge proportional in kleinere Theile theilen, falls diese auf einander folgenden Längen nicht sehr und nur in einem regelmäßigen Verlaufe von einander abweichen, auf gleiche Weise, wie bei den engen Röhren.

c. Vom Calibriren der äußeren Röhrenräume.

Dieses bietet die meisten Schwierigkeiten dar. Es stützt sich auf den von sich selbst verständlichen Satz, daß eine unten verschlossene Röhre, wenn sie in eine weitere, mit Quecksilber bis zu einem bestimmten Theilstriche gefüllte Meßröhre eingetaucht wird, das Quecksilber genau um einen Theilstrich weiter nur dann ansteigen macht, wenn der eingetauchte Raum der Röhre dem innern Raume der Meßröhre zwischen den beiden Theilstrichen gleich ist. Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht durch die folgende Betrachtung:

Fig. 2.



Befindet sich in einer Meßröhre A Quecksilber bis an den Theilstrich a a und wird eine von außen zu calibrirende Röhre B in dieselbe so eingesetzt, daß deren Ende c dieses Quecksilber nur eben berührt, und senkt man die Röhre B dann weiter ein, bis ihr Ende c in die durch punktirte Linien angedeutete andere Stellung d gelangt, wobei die Oberfläche a a des Quecksilbers bis zu dem folgenden Theilstrich b b der Meßröhre erhoben worden ist, so wird jetzt der bis zu b b reichende Raum der Meßröhre offenbar ausgefüllt durch das vorige bis a a eingefüllte Quantum Quecksilber und durch den bis b b eingetauchten Theil der zu calibrirenden Röhre; es ist mithin dieser Theil der Röhre B dem zwischen b b und a a liegenden Theil der Röhre A gleich, und man kann ihn an der Röhre B dadurch fixiren, daß man an ihr in der Richtung b b irgend ein Zeichen anbringt. Taucht man hierauf die Röhre B weiter in das Quecksilber der Meßröhre ein, bis seine Oberfläche an den folgenden über b b stehenden Theilstrich reicht, und merkt man diese neue Stelle an der Röhre B an, so hat man von ihr bis an's Ende der Röhre B aus demselben Grunde zwei solche Räume, wie zuvor der eine zwischen a a und b b liegende war. Auf solche Weise kann man, wenn eine Meßröhre von den geeigneten

Dimensionen dazu genommen worden ist, den ganzen äußern Raum der Röhre B in lauter Theile von bekannter Größe zerlegen und diese weiter, wenn die Beschaffenheit der Röhre es gestattet, in kleinere, ihren Längen proportionale Stücke zerlegen.

Welche Vorsichtsmaßregeln man bei diesem Calibriren stets vor Augen behalten muß, das hängt von der Genauigkeit ab, die man dabei zu erreichen strebt. Im Allgemeinen darf man während dieses Geschäftes keine Temperaturunterschiede zulassen, die den Betrag von einem der bei den Messungen aufzufassenden kleinsten Theile ausmachen könnten, oder man muß, wenn man solche Unterschiede nicht vermeiden will oder kann, deren Einfluß durch die Rechnung bestimmen und darnach die abgelesenen Zahlen abändern. Hierbei macht es einen Unterschied, ob man die zu bezeichnenden Stellen mit dem blosen oder mit bewaffnetem Auge festhält, weil man im letzteren Falle die Maaße in viel kleineren Einheiten noch scharf bestimmen kann, als in ersterem. Auch die Fixirung der Stellen an den Röhren muß mit einer, der kleinsten Einheit in den Maaßen entsprechenden Genauigkeit geschehen; daher wird man da, wo die Beobachtung der Stellen mit einer Loupe oder einem Mikroskop geschieht, sich veranlaßt fühlen, den Abstand dieser Stellen immer auf eine und dieselbe Stelle der Röhre zu beziehen und in ein zu diesem Behufe angelegtes Journal einzutragen und diese Daten mit einem der Röhre zuvor gegebenem Zeichen zu versehen. Mißt man nun die bei dem Gebrauche der Röhre von einer Flüssigkeit bezeichnete Stelle mit demselben möglichst genauen Maaßstabe, womit man die Calibrirung vorgenommen hat, so wird man aus den für diese Röhre in das Journal eingetragenen Daten den Raum der in der Röhre befindlichen Flüssigkeit stets mit der äußersten Genauigkeit entnehmen können.

§. 7. Noch ein Mittel zur Bestimmung der Größe eines Körpers.

Solche Meßröhren benützt man zuweilen auch dazu, den von einem festen Körper eingenommenen Raum aufzufinden. Füllt man nämlich die Meßröhre bis zu einem bestimmten Zeichen mit einer Flüssigkeit, und veranlaßt dann den Körper in ihr unterzusinken, so wird das Ansteigen der Oberfläche jener Flüssigkeit in der Röhre die Größe des festen Körpers zu erkennen geben.

Fig. 3.



Noch besser läßt sich indessen dieser Zweck durch ein gläsernes Gefäß A, wie in beistehender Figur erreichen, auf welches ein ebener Deckel B aufgeschliffen worden ist. Man füllt dieses Gefäß bis über den Rand mit einer Flüssigkeit voll, legt den ebenen Deckel auf, damit alle überflüssige Flüssigkeit herausgedrückt wird, trocknet und wägt so das Ganze. Hierauf hebt man den Deckel ab, bringt den Körper, dessen Raum man finden will, in die Flüssigkeit, legt den Deckel, wo es

nöthig ist, gewaltsam auf, und bestimmt nun wieder nach geschehenem Abtrocknen das Gewicht des Ganzen. Zieht man nun dieses Gewicht von der Summe des vorigen und des Gewichtes von dem eingelegten Körper ab, so bleibt das Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeit übrig, und hieraus läßt sich die Größe des Körpers mit großer Genauigkeit berechnen, wenn man das Gewicht von der Raum-Einheit der zu dem Versuche benützten Flüssigkeit kennt. Hierbei hat man jedoch darauf zu sehen, daß der Körper nicht chemisch von der Flüssigkeit angegriffen wird.

Aber selbst in solchen Fällen, wo man es für gut findet, die Bestimmung der Größe eines Körpers aus dessen Gestalt durch die Mathematik geschehen zu lassen, ist doch zur Bestimmung der Gestalt das Messen von Längen und Winkeln eine unerläßliche Bedingung.

Die heutige Mechanik hat die Genauigkeit in dem Baue von Längen- und Winkelmessern mittelst der zu diesem Behufe von ihr ersonnenen Längen- und Kreistheilmaschinen sehr weit getrieben, so daß man gegenwärtig Längen noch recht gut bis auf weniger als ein Hundertstel von einer Linie, Winkel nahe bis auf eine Sekunde genau und in besonderen Fällen noch genauer bestimmen kann. Der Physiker muß, wenn er seinen Versuchen die größte Schärfe geben will, solche ihm dargebotene Hilfsmittel sich zu verschaffen und gehörig zu gebrauchen lernen.

Kapitel II.

Von der Zusammensetzung der in einem festen Körper auftretenden vielen Wirkungen.

---

§. 8. Allgemeinste Sätze.

Jede mit der Materie vereinte Kraft strebt diese in Bewegung zu setzen, d. h. wirkt ortsverändernd auf sie ein, und bringt die Ortsveränderung der Materie entweder wirklich zu Stande, oder pflanzt ihr wenigstens den Trieb dazu ein; dieser Trieb indessen kann durch die Gegenwirkung von einer oder mehreren anderen Kräften aufgehoben werden, und dann sagen wir, daß jene Kraft mit dem Vereine von diesen andern Kräften im Gleichgewicht sei. Es ist ein durch alle Thatsachen ohne Ausnahme sich bestätigender Satz, daß die Wirkung einer Kraft durch den Hinzutritt von andern unter sich das Gleichgewicht haltenden nicht im Geringsten geändert wird. Wir werden diesen Satz den Satz der gleichen Wirkung nennen. Indem wir jetzt an der Hand dieses Satzes die Zusammensetzung

der Wirkungen in einem Körper betrachten werden, stellen wir die folgenden Benennungen auf.

Erstens nennen wir die Stelle des Atoms, in welchem eine Kraft thätig wird, den Angriffspunkt der Kraft, zweitens die Richtung, in der die Bewegung des Atoms durch diese Kraft eingeleitet wird, die Richtung der Kraft, endlich den Weg, welchen der Atom während jeder Zeiteinheit in dieser Richtung zurücklegt, wenn er der Kraft ungehindert folgen kann und dieselbe bereits vollständig in sich aufgenommen hat, die Größe der Kraft. Dieser Weg ist das, was man sonst auch die an der Bewegung wahrnehmbare Geschwindigkeit nennt; wir setzen also damit die Geschwindigkeit als ein Maaß für die Kraft fest, und nennen diesemnach eine Kraft die doppelte, dreifache u. s. f. von einer andern, wenn sie in die Bewegung einer Masse die doppelt, dreifach u. s. f., so große Geschwindigkeit wie die andere bringt. Die Größe einer Kraft ist diesemnach stets durch eine gerade Linie darstellbar, und man kann auf solche Weise gleichzeitig die Richtung und die Größe einer Kraft im Bilde darstellen, wenn man deren Angriffspunkt besonders angibt und deren Größe als Länge von ihm aus in die Gerade trägt, in welcher deren Richtung liegt, und zwar nach der Seite hin, nach welcher die Kraft hinwirkt. Der zwischen den festen und flüssigen Körpern vorhandene Unterschied in der Art des Beisammenseins ihrer Molecüle zieht eine sehr verschiedene Aeußerung der Kräfte in den beiden Körpern nach sich und veranlaßt uns, unsere Betrachtungen zunächst auf feste Körper zu beschränken und erst später die in flüssigen Körpern wirksamen Kräfte in Angriff zu nehmen.

Es ist schon den vereinten Bemühungen der ältern Physiker gelungen, die Wirkungsweise von Kräften in einem festen Körper auf ein, der Erfahrung entnommenes Princip zurückzuführen, das in Folgendem besteht:

Wenn zwei Kräfte einen festen Körper an zwei verschiedenen Stellen angreifen, so halten sie sich einander das Gleichgewicht, wenn erstens deren Richtungen beide längs derselben, die zwei Angriffspunkte verbindenden Geraden, aber nach entgegesetzten Seiten hin auftreten, und zweitens beide Kräfte einerlei Größe haben; es halten sich aber die beiden Kräfte nicht im Gleichgewicht, wenn entweder die Richtungen in beiden nicht in einer und derselben Geraden liegen, oder nicht nach entgegengesetzten Seiten hin auftreten, oder wenn nicht die beiden Kräfte einerlei Größe haben.

Die Wahrheit dieses Princips ist gänzlich unabhängig von dem Abstande der beiden Angriffspunkte, daher dürfen diese auch in einander liegen.

Dieses Princip, worin sich gleichsam das Endergebniß aller in einem festen Körper thätigen Molecularkräfte ausspricht, bleibt indessen nur so lange wahr, als die auf den festen Körper einwirkenden Kräfte klein genug sind,

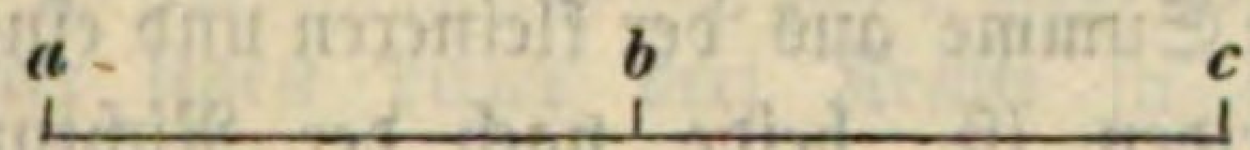
um dessen Festigkeit nicht aufheben, d. h. ihn zerreißen zu können. Eine solche Beschränkung der an einem festen Körper wirksamen Kräfte setzen wir daher bei allen noch folgenden Betrachtungen voraus.

Aus diesem Principe lassen sich nun sogleich die folgenden Sätze ableiten:

1) Eine Kraft bringt in einem festen Körper völlig einerlei Wirkung hervor, wenn sie ihre Größe und Richtung nicht ändert, dagegen ihren Angriffspunkt verläßt und einen andern in der ihrer Richtung entsprechenden Geraden auserwählt.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man so: Es seien (Fig. 4.)

Fig. 4.



a, b, c drei in einer geraden Linie liegende materielle Stellen eines festen Körpers. An zweien derselben, a und b, sollen gleiche Kräfte längs dieser Geraden und nach derselben Seite von ihr hin wirksam sein; an der dritten Stelle c hingegen sei eine Kraft thätig von derselben Größe wie die vorigen zwei, und mit einer Richtung die derselben Geraden, worin a, b und c liegen, entspricht, die aber nach der entgegengesetzten Seite von den vorigen beiden hinstrebt, so halten unserm Princip zur Folge sowohl die Kräfte an a und c, als auch die an b und c einander das Gleichgewicht; dann aber folgt aus dem Satz der gleichen Wirkung, daß die drei in a, b und c wirkenden Kräfte vereint völlig einerlei Wirkung auf den festen Körper äußern, wie die eine Kraft in a allein, und auch wie die eine Kraft in b allein, woraus folgt, daß die in a und b wirkenden Kräfte völlig einerlei Wirkung auf den festen Körper äußern.

2) Wenn zwei an zwei verschiedenen Stellen eines festen Körpers wirksame Kräfte auf ihn völlig einerlei Wirkung äußern, so sind beide gleich groß und deren Richtungen liegen in der durch beide Angriffspunkte hindurch gehenden Geraden und streben nach derselben Seite hin.

Denkt man sich nämlich in der Richtung von der einen dieser beiden Kräfte einen Angriffspunkt ausgewählt und an diesem eine Kraft von gleicher Größe angebracht, deren Richtung mit der Richtung von jener Kraft in derselben Geraden liegt, aber nach entgegengesetzten Seiten hin strebt, so hält diese neue Kraft, dem Principe gemäß, jener einen das Gleichgewicht; dann aber muß sie auch der andern von jenen beiden das Gleichgewicht halten, weil außerdem diese beiden nicht völlig einerlei Wirkung auf den festen Körper hätten, und in Folge dieses Umstandes muß, kraft unseres Principes, diese

andere Kraft der neu angebrachten, somit auch jener einen an Größe gleich sein, und deren Richtung muß in derselben Geraden, wie die der neu angebrachten, sonach auch wie die jener einen Kraft liegen, aber der neu angebrachten Kraft entgegengesetzt sein, sonach mit der jener einen Kraft nach derselben Seite hin streben.

Wir sehen uns nun im Besitze alles Dessen, was erforderlich ist, um den Erfolg von zweien an verschiedenen Stellen und in beliebigen Richtungen wirkenden Kräften auf einen festen Körper beurtheilen zu können.

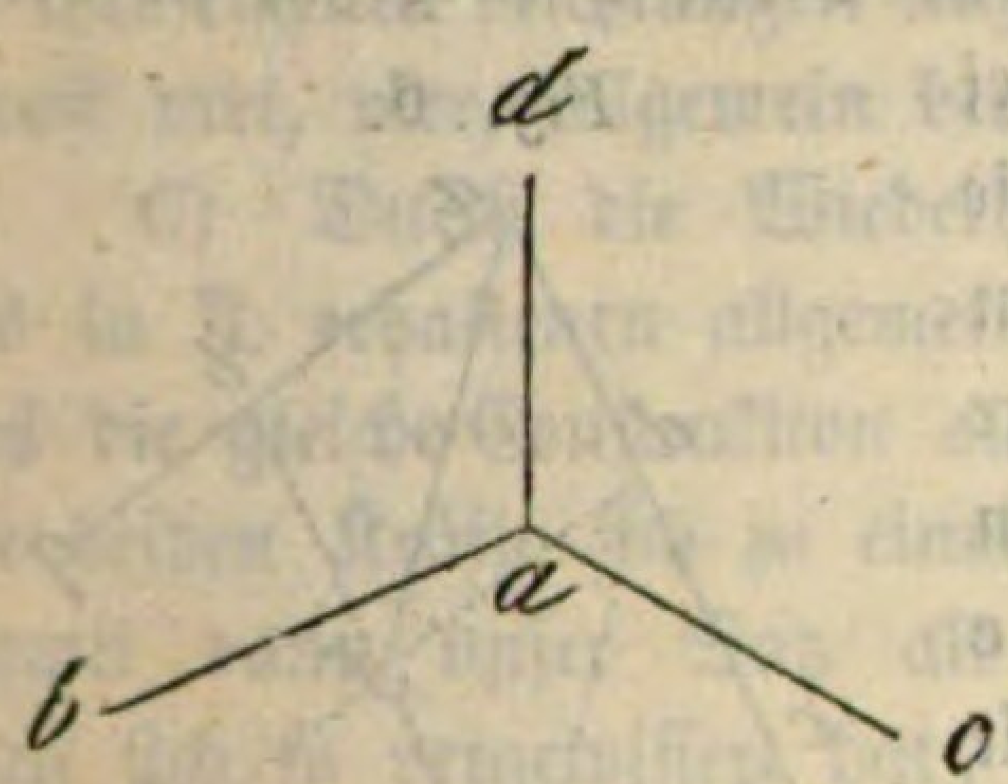
Liegen zuvörderst die Richtungen der beiden Kräfte in einer und derselben Geraden und streben beide nach entgegengesetzten Seiten hin, so halten diese beiden Kräfte, dem Princip zur Folge, einander das Gleichgewicht, so wie sie gleich groß sind; haben aber beide eine ungleiche Größe, so kann man sich die größere als eine Summe aus der kleineren und einer neuen Kraft, welche die Differenz jener beiden ist, beide nach der Richtung der größern Kraft thätig denken, und es hält zufolge des Princips der Theil von ihr, welcher der kleineren Kraft gleich ist, dieser das Gleichgewicht, so daß nach dem Satz der gleichen Wirkung blos die Differenz der beiden Kräfte als Wirkung übrig bleibt, die in der Richtung der größeren Kraft auftritt.

Streben aber die Richtungen der beiden Kräfte nach derselben Seite hin, so ist es dem ersten aus dem Princip gezogenen Satze gemäß erlaubt, beide Kräfte an einer und derselben, in der ihren Richtungen entsprechenden Geraden liegenden Stelle in den gleichen Richtungen angebracht sich vorzustellen, und dann ist ihre Wirkung offenbar die von einer einzigen in der gleichen Richtung wirkenden Kraft, welche die Summe von jenen beiden ist.

Liegen zum Andern die Richtungen der beiden Kräfte nicht in einer und derselben Geraden, sondern in zweien, die sich an einer Stelle des festen Körpers schneiden, so darf man sich, dem ersten aus dem Principe abgeleiteten Satz zur Folge, an dieser Stelle beide mit unveränderter Größe und Richtung wirkend denken und das Resultat der Wirkung aus diesen beiden, an einer und derselben Stelle wirkenden Kräften entnehmen.

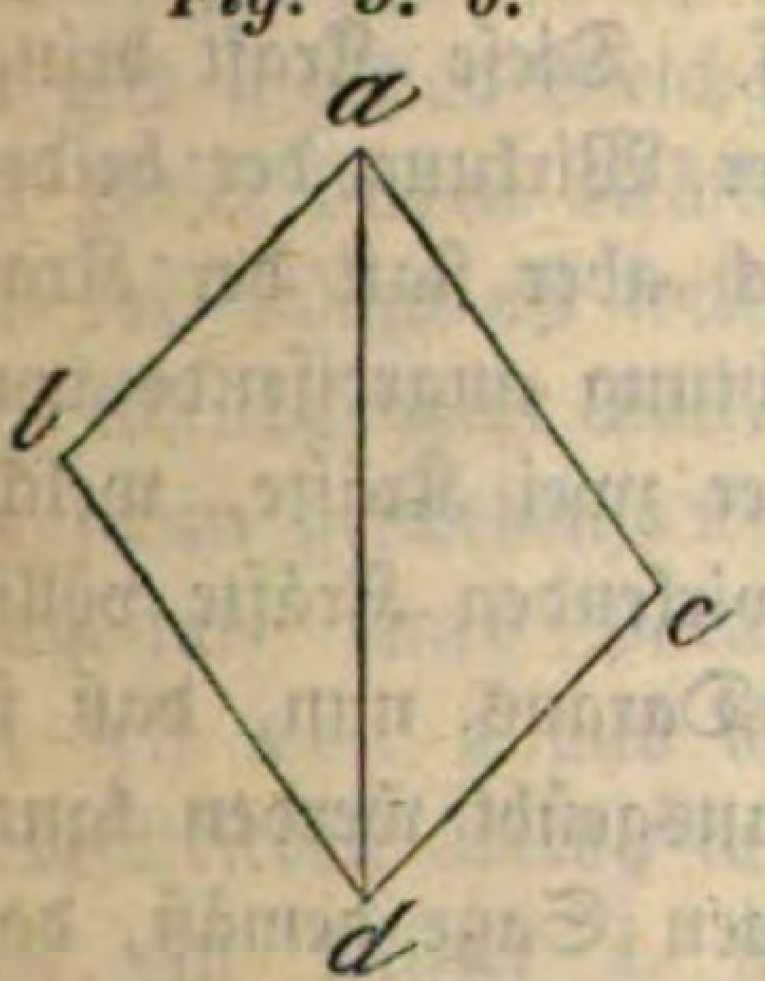
Denkt man sich nun erstlich die beiden Kräfte von gleicher Größe, so kann eine daraus entspringende Bewegung (und schon jeder darauf hinzielende Versuch zeigt das Dasein einer solchen Bewegung an) offenbar in keiner andern Richtung geschehen, als längs der mitten zwischen den Richtungen der beiden Kräfte liegenden Geraden, wie schon aus der völligen Gleichheit aller Umstände zu beiden Seiten dieser Geraden hervorgeht. Ob diese Bewegung in den hohlen oder in den erhabenen Winkel zwischen den Richtungen der beiden Kräfte hinein geschieht, bleibt zwar dabei noch unentschieden, läßt sich indessen aus dem nachstehenden besondern Falle leicht erkennen.

Fig. 5. a.



Stellen (in Fig. 5. a.) ab, ac, ad drei in einer Ebene liegende Richtungen vor, welche paarweise unter sich einerlei Winkel einschließen, nämlich den von 120°, und befindet sich in a eine materielle Stelle, welche längs dieser drei Richtungen durch drei an Größe gleiche Kräfte angegriffen wird, so müssen diese drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, schon deßwegen, weil sich diese materielle Stelle nach verschiedenen Seiten hin unter völlig gleichen Umständen befindet und also die Bewegung nicht vorzugsweise nach der einen von diesen Seiten hin erfolgen kann. Es ist folglich die Wirkung von je zweien dieser drei Kräfte der dritten an Größe gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt. Es strebt aber die Richtung einer jeden dieser drei Kräfte in den erhabenen Winkel zwischen den zwei andern hinein, deßhalb muß die vereinte Wirkung dieser beiden andern in ihren hohlen Winkel hinein streben, und was in einem solchen besondern Falle wahr ist, kann ohne einen unzulässigen Gedankensprung in keinem andern besondern Falle unwahr sein. Wir ziehen hieraus die Berechtigung zu der Behauptung, daß die auf eine materielle Stelle erfolgende Einwirkung zweier gleichen Kräfte, deren Richtungen unter sich einen Winkel einschließen, diese Stelle in eine Bewegung längs der diesen Winkel halbirenden Geraden versetzt, und zwar in die hohle Seite des Winkels hinein. Dieses in Worten ausgesprochene Resultat läßt sich aber durch die folgende geometrische Construktion wiedergeben.

Fig. 5. b.

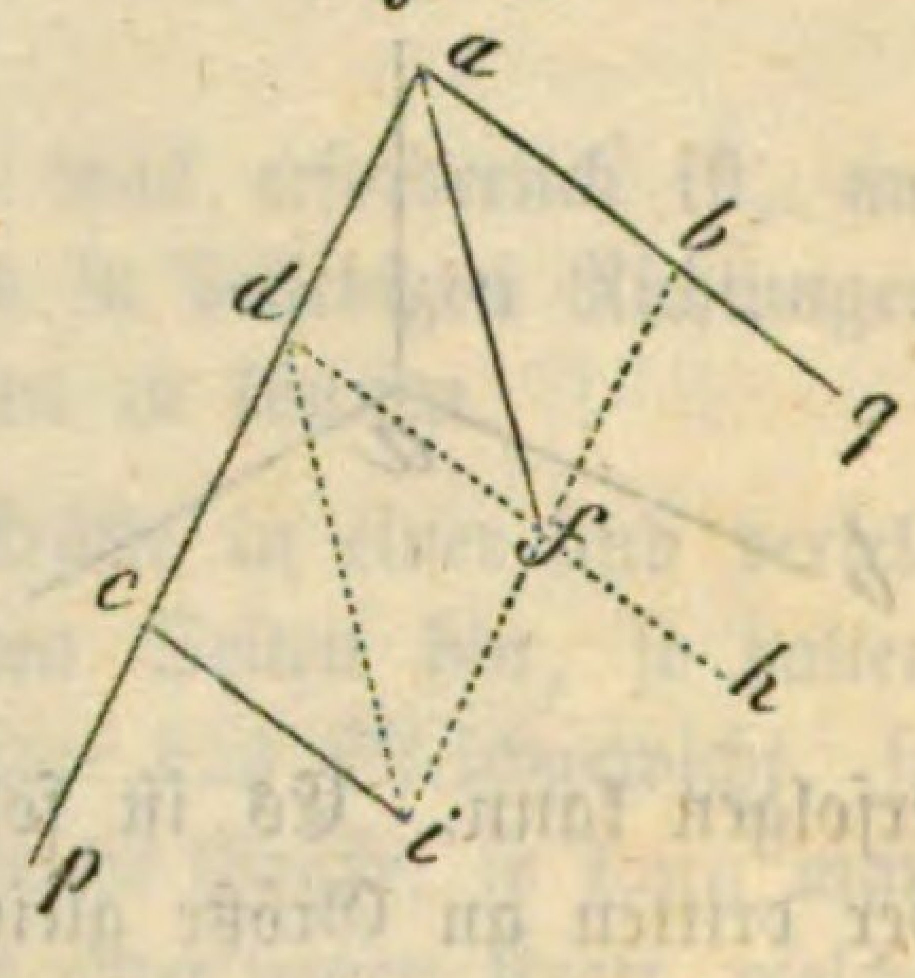


Stellt (Fig. 5. b.) a die von zwei Kräften in den Richtungen von a nach b und a nach c hin angegriffene materielle Stelle vor, und trägt man die Größen der Kräfte in deren Richtungen als Längen ab und ac auf, beschreibt hierauf über diesen beiden Längen und deren eingeschlossenem Winkel ein Parallelogramm abdca, und zieht dessen von der angegriffenen Stelle a nach der gegenüber liegenden Ecke d hinlaufende Diagonale, so gibt diese durch ihre Richtung die Richtung der aus den beiden Kräften hervorgehenden Wirkung an; denn in unserm besondern Falle, wo die beiden Kräfte einerlei Größe haben, werden die Längen ab und ac einander gleich, das Parallelogramm verwandelt sich dann in eine Raute, deren Diagonale den Winkel halbirt, durch den sie geht. Dieselbe Construktion, die man das Parallelogramm der Kräfte nennt, findet jedoch auch in allen den Fällen ihre Anwendung, wo die beiden Kräfte eine ungleiche Größe besitzen, wie jetzt noch gezeigt werden soll.

§. 9. Zusammensetzung zweier Kräfte im Allgemeinen.

A) Die eine von den beiden auf die materielle Stelle a (Fig. 6.) in den Richtungen a p und a q einwirkenden Kräften sei doppelt so groß wie die andere, und man trage die Größe dieser Kräfte als Längen a b und a c, von denen die Hälften a d und d c der letztern ersterer gleich sein sollen, vom Punkte a aus auf deren Richtungen auf, so kann man statt der Kraft a c zwei andere der a b gleiche setzen, von denen die eine in a von a nach d, die andere in d von d nach c hin wirkt, nach dem was wir von der Natur solcher Kräfte wissen, deren Richtungen in denselben Geraden liegen und nach gleicher Seite hin streben. Die gleichen Kräfte a d und a b liefern, nach dem, was wir soeben kennen gelernt haben, eine vereinte Wirkung, deren Richtung man findet, wenn man über b a d das Parallelogramm a d f b a beschreibt und in ihm die Diagonale a f zieht, und die man sich daher auch an der Stelle f wirkend und aus den Kräften f i und f h, welche denen a d und a b gleich und gleichläufig sind, an dieser Stelle entsprungen vorstellen darf, so daß die Wirkung der ursprünglichen zwei Kräfte der vereinten Wirkung von den drei Kräften d c, f i und f h völlig gleichkommt. Man kann sich aber die Kraft f h an dem Punkte d in der Richtung d f und mit der Größe d f = f h wirkend denken, dem aus unserm Prinzipe abgeleiteten ersten Satz gemäß, und dann bringen die Kräfte d c und d f, weil sie gleiche Größe haben, eine vereinte Wirkung hervor, deren Richtung durch die Diagonale d i des Parallelogramms d c i f d angezeigt wird, und die man sich aus diesem Grunde auch die Stelle i angreifend denken darf. Diese Kraft bringt im Verein mit der f i eine Wirkung hervor, welche der Wirkung der beiden ursprünglichen Kräfte völlig gleich kommt. Weil man sich aber statt der Kraft f i eine ihr gleiche und die Stelle i in derselben Richtung angreifende vorstellen darf, so kann man sich die vereinte Wirkung jener zwei Kräfte, welche der vereinten Wirkung der zwei ursprünglichen auf a wirkenden Kräfte völlig gleich kommt, als in der Stelle i geschehend denken. Daraus nun, daß in a und i völlig gleiche Wirkung auf den festen Körper ausgeübt werden kann, folgt aber dem zweiten aus unserm Prinzipe abgeleiteten Satze gemäß, daß die vereinte Wirkung der ursprünglichen zwei Kräfte längs der durch a und i hindurchgehenden Geraden erfolgt, welche Gerade die Diagonale des über b a c beschriebenen Parallelogramms ist, w. z. e. w.

Fig. 6.

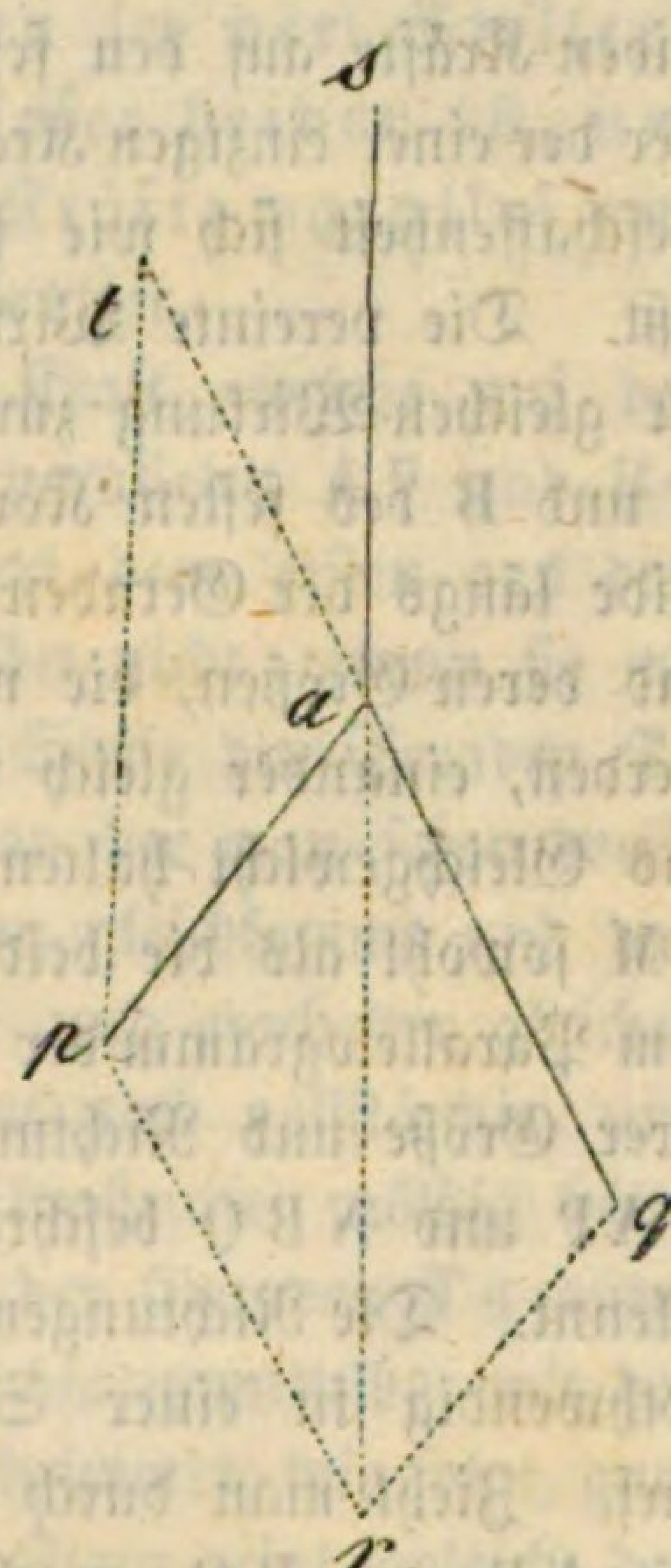


B) Durch Wiederholung des in A) gegebenen Beweises in ganz analoger Weise unter jedesmaliger Zugrundelegung des zuvor erwiesenen Falles gelangt man zu der Einsicht, daß die Richtung der vereinten Wirkung zweier einen

Punkt angreifenden Kräfte durch die Diagonale eines Parallelogramms angezeigt wird, das man über den von dem angegriffenen Punkte aus als Längen in ihre eigenen Richtungen eingetragenen Kräften beschreibt, auch wenn die eine Kraft drei, vier, allgemein beliebig vielmal größer ist, als die andere.

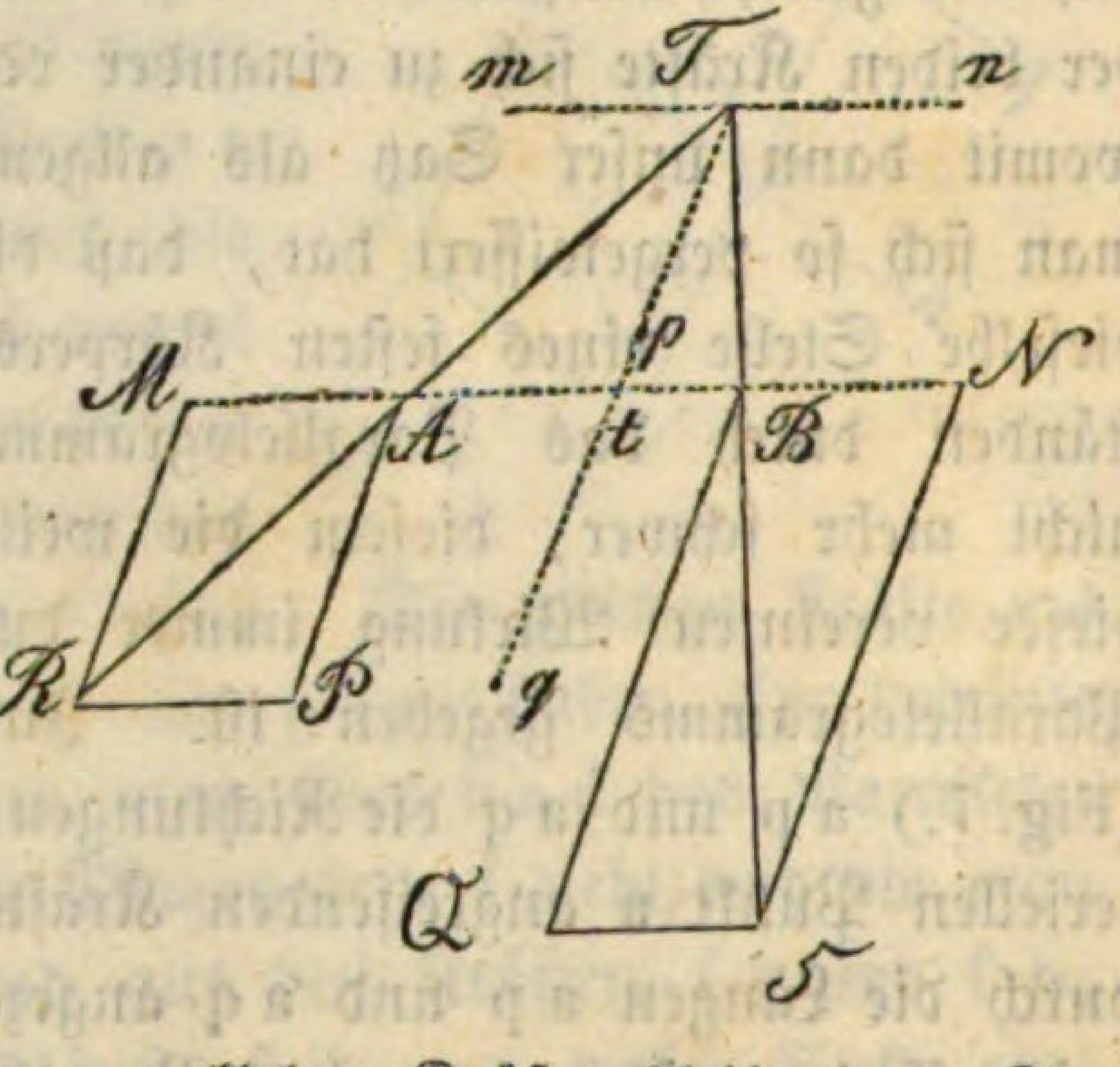
C) Durch die Wiederholung desselben Beweises unter Zugrundlegung des in B. erhaltenen allgemeinen Resultates gewinnt man die Ueberzeugung, daß die gleiche Construktion auch dann noch zum Ziele führt, wenn die Größen der beiden Kräfte sich zu einander verhalten, wie zwei beliebige ganze Zahlen, womit dann unser Satz als allgemein erwiesen zu betrachten ist. Nachdem man sich so vergewissert hat, daß die Richtung der vereinten Wirkung zweier dieselbe Stelle eines festen Körpers angreifenden Kräfte unter allen Umständen durch das Parallelogramm der Kräfte angezeigt wird, hält es nicht mehr schwer, diesem die weitere Einsicht beizufügen, daß die Größe dieser vereinten Wirkung immer durch die Länge der Diagonale desselben Parallelogramms gegeben ist. In der That sind (Fig. 7.) a p und a q die Richtungen zweier den materiellen Punkt a angreifenden Kräfte, deren Größen durch die Längen a p und a q angezeigt werden, und beschreibt man über p a q das Parallelogram a p r q a, so wird die Richtung der aus diesen beiden Kräften hervorgehenden vereinten Wirkung durch die Diagonale ar angezeigt, und die noch unbekannte Größe dieser Wirkung wird einer gewissen Länge L entsprechen. Eine Kraft von dieser Größe, welche den Punkt a in einer der a r gerade entgegengesetzten Richtung a s angreift, hält dann den beiden Kräften a p und a q das Gleichgewicht, sowie umgekehrt auch eine dieser beiden Kräfte z. B. a q der andern a p und der längs a s wirkenden von der Größe L das das Gleichgewicht hält. Dieses Letztere aber kann nur dann geschehen, wenn die Gerade a q mit der Diagonale eines Parallelogramms, das über a p und die von a aus längs a s aufgetragene Länge L beschrieben wird, in einer und derselben Geraden liegt, und hierin hat man ein Mittel L selber zu bestimmen. Verlängert man nämlich a q über a hinaus, zieht man ferner durch p eine Parallele mit der Richtung a s und schneiden sich diese beiden neugezogenen Geraden im Punkte t, so wird durch p t die Länge L ausgesprochen, also wird, weil pt=ar ist, die Größe der aus den beiden Kräften a p und a q entspringenden vereinten Wirkung durch die Länge a r, d. h. schon durch die Länge der Diagonale des ursprünglichen Parallelogramms der Kräfte ausgesprochen.

Fig. 7.



Schneiden zum Dritten die Richtungen der beiden gegebenen Kräfte einander nicht, liegen aber doch in einer und derselben Ebene, so laufen sie einander parallel, und dann sind zwei Fälle von einander zu unterscheiden, der, wo beide Kräfte nach einerlei, und der, wo beide nach entgegengesetzten Seiten des Raumes hin streben.

Fig. 8.



Sind (Fig. 8.) A und B zwei Stellen eines festen Körpers, in welchen Kräfte von beliebiger Größe längs den parallelen Geraden A P und B Q in Richtungen von A nach P und von B nach Q, also nach derselben Seite von AB hin wirken, und stellt A P als Länge die Größe der in A wirkenden, B Q die Größe der in B wirkenden Kraft vor, so ist die vereinte Wirkung dieser beiden Kräfte auf den festen Körper immer der einer einzigen Kraft gleich, deren Beschaffenheit sich wie folgt bestimmen läßt. Die vereinte Wirkung dieser beiden parallelen Kräfte bleibt dem Satze der gleichen Wirkung zur Folge völlig die gleiche, wenn an den beiden Stellen A und B des festen Körpers zwei Kräfte wirksam werden, deren Richtungen beide längs der Geraden AB, aber nach entgegengesetzten Seiten hin auftreten, und deren Größen, die wir durch die gleichen Längen A M und B N bezeichnen werden, einander gleich sind, weil solche zwei neu hinzugefügte Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Die beiden in A sich schneidenden Kräfte A P und A M sowohl als die beiden in B sich schneidenden B Q und B N setzen sich aber dem Parallelogramm der Kräfte zur Folge in je eine einzige zusammen, die man ihrer Größe und Richtung nach aus den Diagonalen A R und B S der über M A P und N B Q beschriebenen Parallelogramme M A P R M und N B Q S N erkennt. Die Richtungen dieser beiden Kräfte AR und BS schneiden sich dann nothwendig in einer Stelle T, an der man sich dieselben wirkend vorstellen darf. Zieht man durch T die Gerade m n parallel mit A B, die T q parallel mit A P oder B Q, macht m T = M A und T p = A P sowohl als n T = N B und T q = B Q, so kann man sich die Kraft A R an der Stelle T als aus den, durch die Längen m T und T p ihrer Richtung und Größe nach bezeichneten Kräften erzeugt vorstellen, und eben so kann man die Kraft B S als aus den durch die Längen n T und T q ihrer Richtung und Größe nach vorgestellten beiden Kräften hervorgegangen sich denken, weil diese im festen Körper nothwendig Kräfte bilden, welche denen AR und BS an Größe gleich kommen und deren Richtungen in den Geraden TR und TS liegen und nach denselben Seiten hinstreben, also dem ersten aus dem Prinzip gezogenen Satze gemäß

mit jenen einerlei Wirkung auf den festen Körper äußern. Da nun, wie wir weiter oben gefunden haben, die Kräfte AR und BS völlig einerlei Wirkung auf den festen Körper haben, wie die anfangs betrachteten zwei parallelen Kräfte AP und BQ, so gilt dasselbe auch von den vier Kräften Tm, Tn, Tp und Tq, von welchen die Tm und Tn gleiche Größe besitzen und Richtungen haben, die beide in der Geraden mn liegen, aber nach entgegengesetzten Seiten hin streben, also einander das Gleichgewicht halten, und deßwegen dem Satze der gleichen Wirkung zur Folge die vereinte Wirkung der Kräfte Tp und Tq nicht abzuändern vermögen. Es ist also die vereinte Wirkung dieser beiden Kräfte Tp und Tq auf den festen Körper der von den anfangs betrachteten parallelen AP und BQ völlig gleich; weil aber dem Baue unserer Figur entsprechend Tp=AP und Tq=BQ ist, Tp und Tq beide längs derselben Geraden nach derselben Seite hinwirken, demnach Tp und Tq zur Summe sich vereinigen, so folgt schließlich, daß die Wirkung der ursprünglich in's Auge gefaßten beiden parallelen Kräfte AP und BQ eins ist mit der Wirkung einer einzigen in der Stelle T wirkenden Kraft, deren Größe die Summe dieser beiden ist, und deren Richtung denen der beiden parallelen Kräfte parallel und nach derselben Seite des Raumes hin gerichtet ist.

Diese eine an der Stelle T längs Tq wirkende Kraft, welche auf den festen Körper völlig einerlei Wirkung ausübt, wie die parallelen AP und BQ an den Stellen A und B auf ihn einwirkenden, ändert dem ersten aus dem Prinzipe abgeleiteten Satze gemäß ihre Wirkung auf ihn nicht, wenn sie mit gleicher Größe und Richtung an irgend einer andern Stelle der Geraden Tq thätig auftritt; man kennt demnach diese eine Kraft, von der man schon weiß, daß ihre Größe der Summe von den beiden parallelen gleichkommt und daß ihre Richtung den Richtungen dieser beiden parallel und nach der gleichen Seite des Raumes hinstrebend ist, ihrem ganzen Wesen nach vollständig, und zwar ohne daß man erst die vorstehende Figur zu konstruiren nöthig hätte, sowie man auf eine andere Weise irgend eine Stelle der Geraden Tq anzugeben wüßte. Die Stelle t aber, in welcher diese Gerade die unmittelbar mit den parallelen Kräften selbst gegebene Grade AB trifft, läßt sich immer, wie folgt, ganz einfach finden. Der blose Hinblick nämlich auf unsere Figur zeigt sogleich, daß die Dreiecke RAP und ATt, sowie die SBQ und BTt stets einander ähnlich sind, weßhalb man hat RP:AP=At:Tt und SQ:BQ=Bt:Tt; und aus diesen beiden Proportionen folgt, weil RP=AM und SQ=BN, somit RP=SQ ist, daß

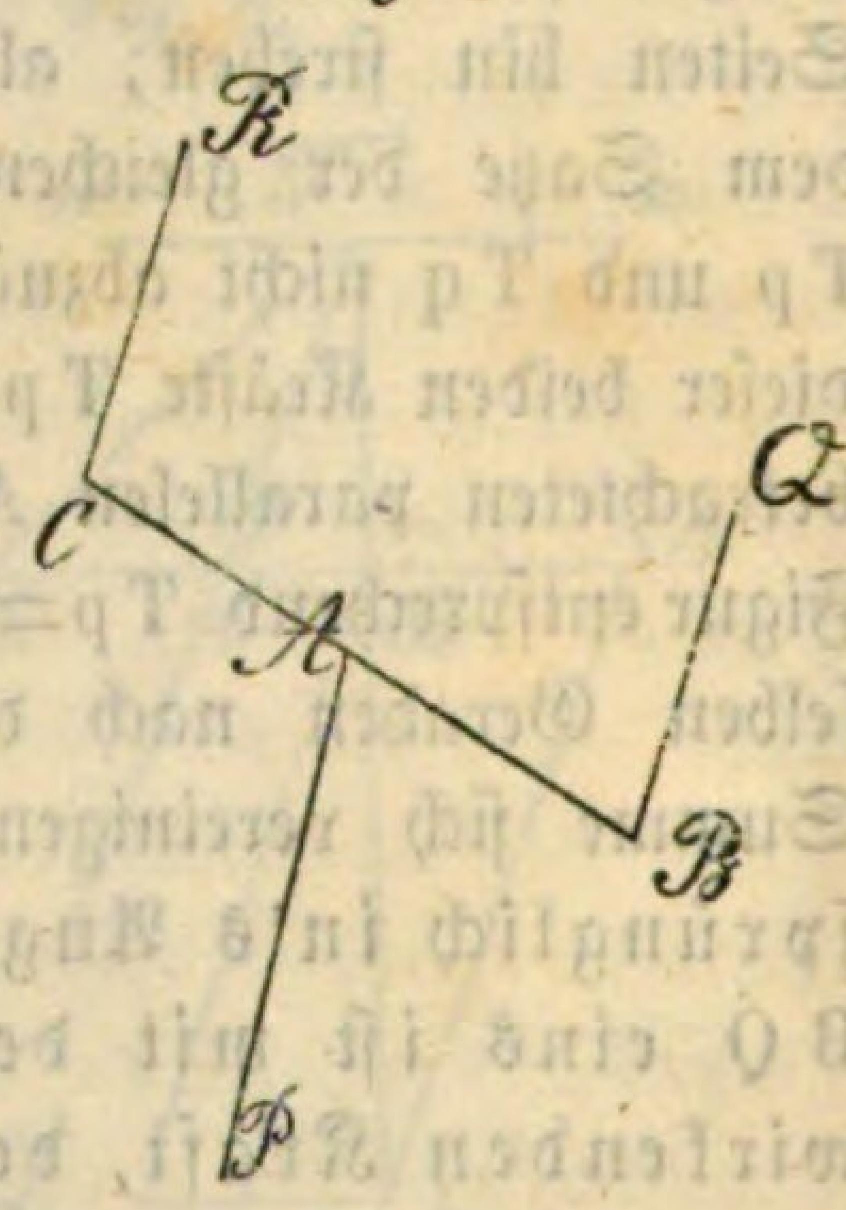
$$AP.At=BQ.Bt,$$

d. h.: daß das Produkt aus der einen Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von der gesuchten Stelle t dem analog gebildeten Produkte bezüglich auf die andere Kraft gleich ist, und dieser Satz reicht völlig hin zur Auffindung der gesuchten Stelle t.

Hienach lassen sich immer leicht solche drei parallele Kräfte angeben und erkennen, welche einander das Gleichgewicht halten.

Betrachten wir nun noch den andern bei parallelen Kräften möglichen Fall, wo die eine der beiden Kräfte AP wie in (Fig. 9.) den festen Körper an der Stelle A nach P zu bewegen strebt, die andere BQ an der Stelle B in der Richtung von B nach Q, beide also nach entgegengesetzten Seiten des Raumes ihn zu bringen suchen, so läßt sich dieser Fall immer leicht auf den vorigen zurückführen, wenn die beiden Kräfte AP und BQ von ungleicher Größe sind. Denn ist z. AP größer als BQ und verlängert man AB nach der andern Seite und bringt hier eine andere Kraft von der Größe AP — BQ an, deren Richtung der von BQ gleichlaufend und mit dieser nach derselben Seite des Raumes hin strebend ist, und zwar an derjenigen Stelle C der Verlängerung von AB, wo

Fig. 9.



$AB.BQ = (AP - BQ)AC$, also $AC = \frac{BQ.AB}{AP - BQ}$ ist, so hält die in A wirkende Kraft AP, weil sie die Summe von den beiden BQ und AP — BQ ist, diesen letztern an B und C wirksamen das Gleichgewicht, dem so eben Vorgebrachten zur Folge. Wenn aber die drei an A, B und C angebrachten Kräfte unter sich im Gleichgewichte sind, so hält auch die an C angebrachte denen an A und B angebrachten das Gleichgewicht gerade so wie einer in irgend einer Stelle der Geraden CR angebrachten, deren Größe AP — BQ ist und deren Richtung in dieser Geraden liegt, aber nach der entgegengesetzten Seite des Raumes als die strebt, nach welcher die zuvor in C angebrachte Kraft von der Größe AP — BQ hin wirkte. Hieraus nun folgt, daß die beiden parallelen Kräfte AP und BQ auf den festen Körper genau die gleiche Wirkung äussern, wie eine einzige von der Größe AP — BQ, die eine auf entgegengesetzter Seite von der größern Kraft als die kleinere Kraft liegende bekannte Stelle c in der Geraden AB angreift, aber nach derselben Seite des Raumes hin strebt, wie die größere von den beiden parallelen Kräften AP und BQ.

§. 10. Ein besonderer Fall, wo diese Zusammensetzung zweier Kräfte nicht mehr möglich ist. Drehzwilling.

Die zuletzt geschehenen Betrachtungen verlieren ihren Sinn in dem besondern Falle, wo die beiden parallelen und entgegengesetzt wirkenden Kräfte AP und BQ einander gleich werden, wie schon daraus hervorgeht, daß die vorhin gefundene Gleichung

$$AC = \frac{BQ.AB}{AP-BQ},$$

wodurch die Stelle C im Falle ungleicher und entgegengesetzter paralleler Kräfte gefunden worden ist, da wo diese Kräfte einerlei Größe haben und also $AP = BQ$ ist, wird:

$$AC = \frac{BQ.AB}{0}$$

und dadurch zu erkennen gibt, daß dieser Fall aus der allgemeinen Regel heraustritt. Formell genommen würde hiedurch die vereinte Wirkung zweier gleicher und entgegengesetzter paralleler Kräfte der Wirkung einer einzigen Kraft von der Größe null entsprechen, die man sich aber in unendlicher Ferne von den beiden gegebenen wirkend zu denken hätte, was keinen rechten Sinn gibt. Das Wahre an der Sache besteht aber darin, daß zwei solche Kräfte überhaupt nicht durch eine einzige vertreten werden können. Jede einzelne Kraft strebt die Stelle, worin sie thätig ist, in stets gleicher Richtung und mit stets gleicher Geschwindigkeit, so lange sie selber keine Aenderung erleidet, vorwärts zu treiben, ihr eine geradlinig fortschreitende Bewegung mitzutheilen. Von zwei gleichen und entgegengesetzten parallelen Kräften aber sucht die eine eine Stelle des festen Körpers nach der einen Seite und eine andere Stelle desselben festen Körpers mit derselben Kraft nach der gerade entgegengesetzten Seite hinzutreiben, und man sieht gar leicht ein, daß hiedurch nichts anderes, als eine Drehung des festen Körpers bewirkt werden könne. Aus diesem Grunde legen wir dem Vereine zweier gleicher und entgegengesetzter, paralleler Kräfte, welche den festen Körper an zwei verschiedenen Stellen zu bewegen streben, den Namen eines Drehzwillings*) bei.

Solche Drehzwillinge besitzen höchst merkwürdige Eigenschaften, die wir kennen lernen müssen, weil sich mit ihrer Hülfe das Getriebe von noch so vielen Kräften im Innern eines festen Körpers einfach und doch vollständig beurtheilen läßt.

1) Wirkt ein Drehzwilling auf zwei Stellen eines festen Körpers und denkt man sich einen zweiten in den gleichen Stellen mit gleichen Kräften thätig, deren Richtungen aber an jeder Stelle denen des vorigen Zwillings gerade entgegengesetzt sind, so hebt offenbar jeder dieser zwei Drehzwillinge die Wirkung des andern gänzlich auf, weil die an jedem Angriffspunkte thätigen beiden Kräfte einerlei Größe und gerade entgegengesetzte Richtungen haben, also kraft des Prinzips einander das Gleichgewicht halten. Solche zwei Drehzwillinge haben folglich einander gerade entgegengesetzte

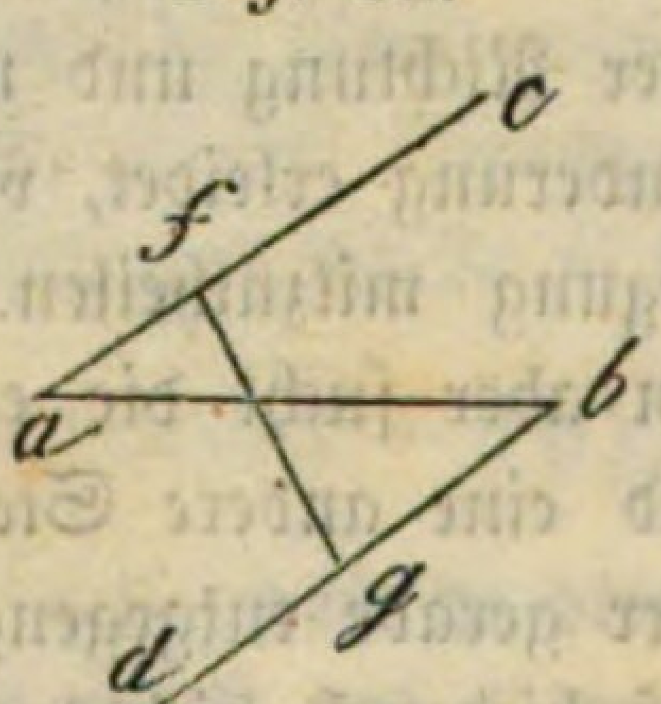
*) Die hier eingeführte Benennung für zwei gleiche aber in gerade entgegengesetzter Richtung auf einen festen Körper einwirkende Kräfte ist gefälliger und bezeichnender als die sonst dafür gebrauchten Wörter „Couple" oder „Gegenpaar".

Naturen; sie unterscheiden sich dadurch von einander, daß wenn man sich deren beide Angriffspunkte in lothrechter Richtung über einander liegend vorstellt, der obere Punkt beim einen nach der rechten, beim andern nach der linken Seite hingetrieben wird, weßhalb wir jenen einen rechten, diesen einen linken Drehzwilling nennen werden.

2) Man kann sich leicht überzeugen, daß die Größe der aus einem Drehzwillinge hervorgehenden Wirkung durch das Produkt aus der Größe der Kraft, welche in jedem seiner beiden Angriffspunkte thätig ist, in den senkrechten Abstand der beiden Parallelen von einander, längs welchen die Richtungen der beiden Kräften auftreten, gemessen wird.

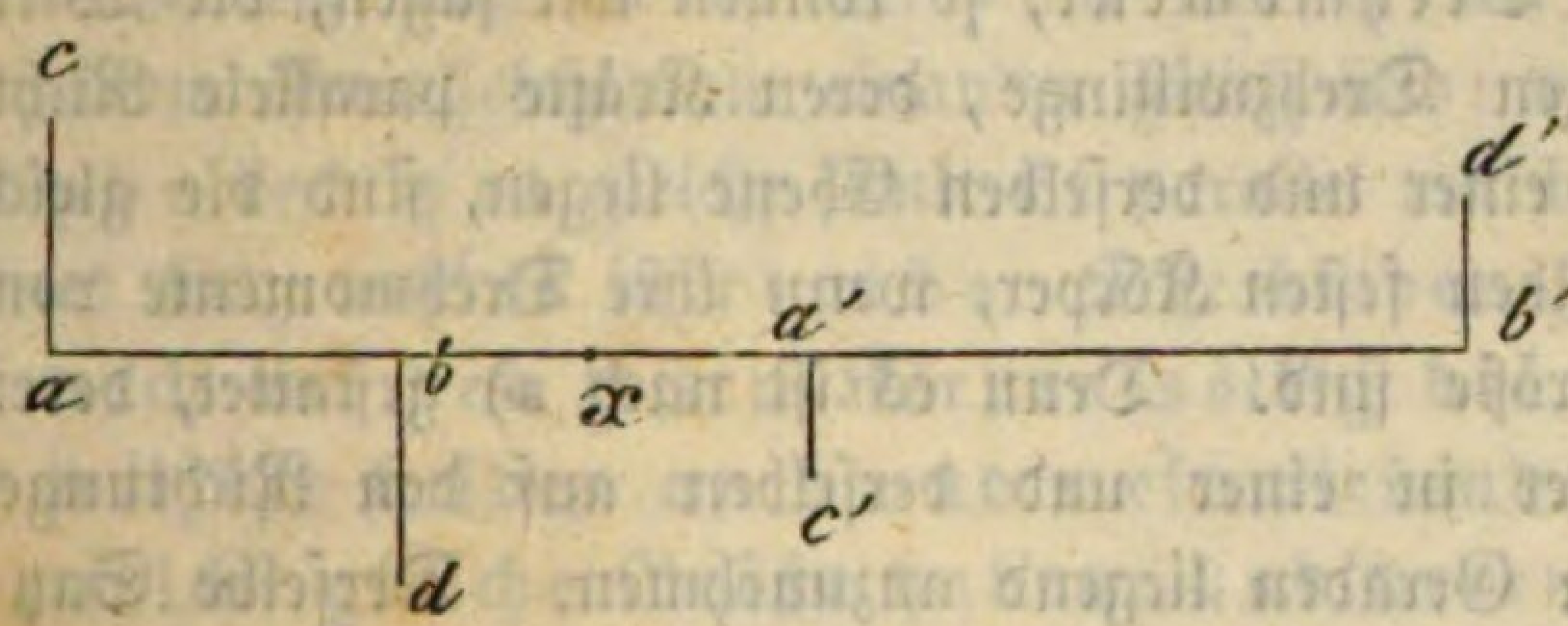
a) Denn es ist die Wirkung eines Drehzwillings, dessen Angriffspunkte nicht in einer Geraden liegen, welche senkrecht auf den Richtungen seiner beiden Kräfte steht, wie in (Fig. 10.), wo a und b die Angriffspunkte eines solchen Drehzwillings bedeuten, und a c und b d die parallelen Richtungen seiner beiden Kräfte sind, immer der Wirkung eines andern gleich, dessen beide Angriffspunkte f und g die Durchschnitte der parallelen Richtungen a c und b d und einer auf beiden senkrechten Geraden sind, wenn an f eine Kraft von derselben Größe und Richtung wie an a, und an g eine Kraft von derselben Größe und Richtung wie an b wirksam ist, wie schon daraus hervorgeht, daß dem ersten aus unserm Principe abgeleiteten Satze gemäß, die an a und f wirkenden beiden Kräfte sowohl, wie die an b und g wirkenden völlig einerlei Wirkung auf den festen Körper ausüben, sonach auch der Verein der beiden in a und b wirkenden Kräfte dem Vereine der beiden in f und g wirkenden Kräfte völlig gleich kommt. Nennen wir solche Drehzwillinge, deren Kräfte Richtungen haben, welche schief gestellt sind gegen die ihre beiden Angriffspunkte verbindende Gerade, schiefwinkelige und solche, deren Richtungen senkrecht auf dieser Geraden stehen, rechtwinkelige, so können wir daher jeden schiefwinkeligen durch einen rechtwinkeligen von völlig gleicher Wirkung auf den festen Körper ersetzen, und brauchen deßhalb in der Folge nur noch rechtwinkelige Drehzwillinge ins Auge zu fassen. Und weil die Punkte f und g einer jeglichen, auf den beiden Richtungen a c und b d senkrecht stehenden Geraden angehören dürfen, wenn es nur Stellen desselben festen Körpers sind, so kann man die Angriffspunkte eines rechtwinkelichen Drehzwillings immer auch an solche Stellen desselben festen Körpers verlegen, in welchen die Richtungen seiner beiden Kräfte von einer Geraden geschnitten werden, die parallel mit der Geraden läuft, welche seine ursprünglichen Angriffspunkte verbindet.

Fig. 10.



b) Sind ferner wie in Fig. 11. ac, bd und a'c', b'd' zwei entgegengesetzt wirkende Drehzwillinge, ein rechter und ein linker, deren Angriffspunkte a, b und a', b' in einer und derselben geraden Linie a b', und deren Ebenen in einer und derselben Ebene liegen, und bezeichnen wir

Fig. 11.



die durch die Länge a c vorgestellte Größe der Kraft an jedem Angriffspunkte im ersten durch P, die der auf die Punkte b' und c' wirkenden im andern durch Q, so läßt sich leicht zeigen, daß diese beiden Drehzwillinge einander das Gleichgewicht halten, wenn $ab.P = a'b'.Q$ ist. In der That üben die beiden parallelen an b und a' nach einerlei Seite hin wirkenden Kräfte b d und a' c', nach dem was wir von solchen Kräften wissen, dieselbe Wirkung aus, wie eine einzige Kraft von der Größe $P + Q$, die einen zwischen b und a' liegenden Punkt x der Geraden a b' nach derselben Richtung hin angreift, für welchen $bx.P = a'x.Q$ ist. Eben so üben die beiden Kräfte a c und b'd' völlig dieselbe Wirkung auf den festen Körper aus, wie eine einzige Kraft von der Größe $P + Q$, welche den festen Körper in einem zwischen a und b' liegenden Punkt y der Geraden a b' angreift, für welchen $ay.P = b'y.Q$ ist. Diese beiden einzelnen Kräfte sind einander an Größe gleich, und deren Richtungen laufen den Richtungen der in den Zwillingen thätigen Kräfte parallel, streben aber nach entgegengesetzten Seiten hin. Wollte man nun annehmen, daß y links von x liege, so wäre $ay = ab + bx - xy$ und $b'y = a'b' + a'x + xy$, wodurch die letzte Gleichung übergeht in: $(ab + bx - xy) P = (a'b' + a'x + xy) P$ und in Folge der zuvor erhaltenen beiden Gleichungen $bx.P = a'x.Q$ und $ab.P = a'b'.Q$ wird: $- xy.P = + xy.Q$.

Auf diese letzte Gleichung käme man auch, wenn man y rechts von x liegend annehmen wollte; sie verlangt zu ihrem Bestehen, daß $xy = 0$ sei, d. h. daß der Punkt y im Punkte x selber liege. Hieraus folgt, daß die Stellen x und y in der Geraden a b' von einander nicht verschieden sein können, daß also die beiden einzelnen Kräfte von der Größe $P + Q$, deren Richtungen mit einander parallel laufen, aber nach entgegengesetzten Seiten hin streben, längs einer und derselben Geraden wirksam sind, und also einander das Gleichgewicht halten. Folglich muß dasselbe auch von den beiden Drehzwillingen wahr sein, aus welchen diese beiden Kräfte hervorgegangen sind. Nennen wir

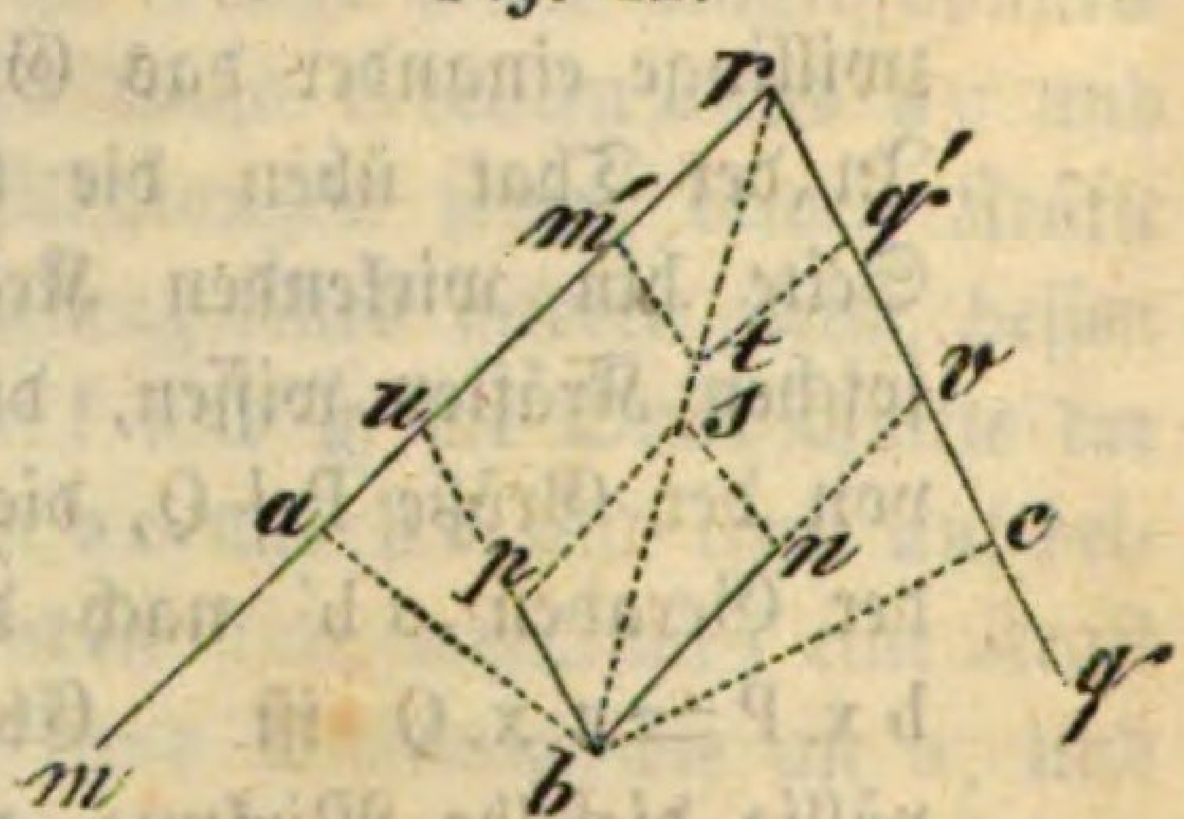
also das Produkt aus der in einem Drehzwillinge an jedem Angriffspunkte thätigen Kraft in den Abstand seiner beiden parallelen Richtungen von einander sein *Drehmoment*, so können wir sagen, die Wirkungen zweier gleichartigen Drehzwillinge, deren Kräfte parallele Richtungen haben, welche in einer und derselben Ebene liegen, sind die gleichen in einem und demselben festen Körper, wenn ihre Drehmomente von einer und derselben Größe sind. Denn es ist nach a) gestattet, deren Angriffspunkte immer in einer und derselben auf den Richtungen der Kräfte senkrechten Geraden liegend anzunehmen. Derselbe Satz bleibt aber auch noch wahr,

c) Wenn die Richtungen der Kräfte im einen Zwillinge nicht mehr denen im andern Zwillinge parallel sind, aber doch in einer und derselben Ebene liegen. Stellt nemlich (Fig. 12.) am, bn einen linken rechtwinkeligen Drehzwilling vor, dessen Angriffspunkte a und b sind, und bp, cq einen rechten, dessen Angriffspunkte b und c sind, und haben diese beiden ein gleiches Drehmoment in sich, d.h. ist

$$am.\ ab = bp.\ bc,$$

wobei $am = bn$ die Größen der im ersten, $bp = cq$ die Größen der im zweiten wirkenden Kräfte vorstellen, so halten sich die beiden Drehzwillinge das Gleichgewicht, wie die folgende Betrachtung lehrt.

Fig. 12.



Verlängert man die Richtungen am und cq bis sie sich in r schneiden, und die bp und bn bis sie die eben genannten in u und v treffen, so ist $burvb$ offenbar ein Parallelogramm, weil seine gegenüberliegenden Seiten gleichlaufende Linien sind. Beschreibt man über pbn das Parallelogramm $bpsnb$ und zieht die Diagonale bs, so hat die in b angebrachte Kraft, welche die durch bs angezeigte Richtung und Größe hat, einerlei Wirkung auf den festen Körper wie die zwei in den Zwillingen thätigen Kräfte bp und bn. Denkt man sich die beiden andern Kräfte am und cq beide auf die Stelle r desselben festen Körpers einwirkend mit gleichbleibenden Richtungen und Größen, und macht man $rm' = am$ und $rq' = cq$, so bringen die Kräfte rm' und rq' einerlei Wirkung auf den festen Körper hervor wie die am und cq, letztere Wirkung ist demnach dieselbe wie die einer einzigen an r angebrachten Kraft, deren Richtung und Größe durch die Diagonale rt des über $m'rq'$ beschriebenen Parallelogramms $rm'tq'r$ angezeigt wird. *Die beiden Zwillinge üben also auf den festen Körper völlig die gleiche Wirkung aus, wie die beiden in b und r einwirkenden Kräfte bs und rt.*

Es sind aber die beiden Parallelogramme b p s n b und r q′ t m′ r einander congruent, weil b p = c q = r q′ und b n = a m = r m′ ist, und außerdem noch die Winkel p b n und q′ r m′ als gegenüberliegende in einem Parallelogramm einander gleich sind; daher ist auch der Winkel p b s dem q′ r t gleich, somit r t parallel mit b s, weil die b p und r q′ es sind, und es ist r t = b s. Die beiden Zwillinge üben demnach auf den festen Körper völlig die gleiche Wirkung aus wie die beiden an b und r einwirkenden Kräfte b s und r t, welche gleiche Größe haben, und deren Richtungen parallel sind, aber nach entgegengesetzten Seiten hinstreben.

Endlich hat man noch zu beobachten, daß, weil a b n und c b p rechte Winkel sind, und deßhalb die rechtwinkeligen Dreiecke a b u und c b v einander ähnlich sind, man hat

$$bu : bv = ab : bc.$$

Aus der an den beiden Zwillingen gemachten Bedingung

$$am . ab = bp . bc$$

folgt aber

$$bp : am = ab : bc,$$

und diese in Verbindung mit der vorigen Proportion gibt:

$$bu : bv = bp : am.$$

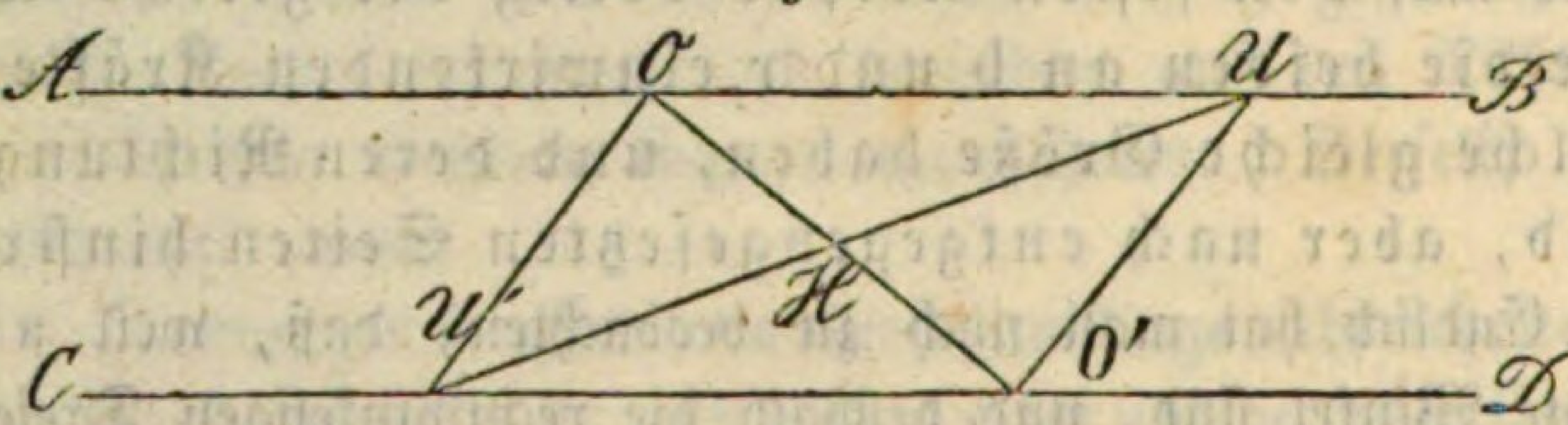
Es verhalten sich sonach zwei aneinander liegende Seiten in dem Parallelogramm b u r v b wie die Größen der in dem rechten und linken Zwillinge thätigen Kräfte; und da sich die homologen Seiten in den Parallelogrammen b p s n b und r q′ t m′ r eben so verhalten, so sind diese drei Parallelogramme einander ähnlich und haben dabei einerlei Lage, deßhalb müssen die beiden Diagonalen b s und r t der letzteren in die von b nach r gezogene Diagonale des ersteren fallen. Die beiden Kräfte b s und r t, welche an Größe gleich sind und deren Richtungen in entgegengesetzter Weise mit einander parallel laufen, wirken somit in einer und derselben Geraden und halten darum einander das Gleichgewicht, was folglich auch von unsern beiden Drehzwillingen gilt.

Aus a), b) und c) geht hervor, daß zwei Drehzwillinge einerlei Wirkung auf einen und denselben festen Körper äußern, wenn sie nur beide rechte oder beide linke sind, gleiche Drehmomente besitzen, und deren Kräfte Richtungen haben, die sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen; aber selbst diese letztere Bedingung kann noch

d) dahin abgeändert werden, daß die beiden Drehzwillingen entsprechenden Ebenen blos mit einander parallel zu laufen brauchen. Man kann nämlich ganz leicht zeigen, daß zwei Drehzwillinge von entgegengesetzter Art, deren Ebenen mit einander parallel lau-

fen, und deren Drehmomente einander gleich sind, sich immer gegenseitig das Gleichgewicht halten. Denn laufen die Ebenen zweier Drehzwillinge mit einander parallel, und läßt man diese Ebenen von einer dritten, worunter wir uns die Ebene des Papiers denken wollen, durchschneiden, so entstehen parallele Schnittlinien, die wir uns (in Fig. 13.) unter AB und CD vorstellen wollen. Da nun nach

Fig. 13.



c) die Richtungen eines jeden Zwillings in seiner Ebene beliebig genommen werden dürfen, ohne daß seine Wirkung auf den festen Körper sich änderte, so können wir sie uns senkrecht auf die Ebene des Papiers gestellt denken, und als Angriffspunkte derselben die Durchschnittspunkte ihrer Richtungen mit dieser Ebene nehmen; da ferner alle gleichartigen Zwillinge, deren Richtungen in derselben Ebene liegen und einander parallel laufen nach b) einerlei Wirkung auf den festen Körper äußern, wenn nur deren Drehmomente gleich sind, so dürfen wir uns die Abstände der Richtungen in jedem Zwilling, also hier die Abstände der Angriffspunkte, als einander gleich voraussetzen, und weil wir hier die Drehmomente in beiden als einander gleich angenommen haben, so hat dieß die Gleichheit der Kräfte in beiden zur nothwendigen Folge. Wir dürfen uns also den einen als aus einer in O senkrecht auf der Ebene des Papiers nach oben und aus einer gleichen in U senkrecht nach unten wirkenden Kraft bestehend, den andern, weil dessen Wirkung der des vorigen entgegengesetzt ist, aus gleich großen in U′ und O′ nach unten und nach oben senkrecht auf die Ebene des Papiers wirkenden Kräften zusammengesetzt denken. Dabei dürfen wir die Entfernungen OU und U′O′ als gleich groß ansehen, müssen dann aber auch alle vier in den beiden Zwillingen thätigen Kräfte als von gleicher Größe seiend annehmen.

Unter dieser Voraussetzung ist aber, wenn wir die Geraden OU′ und UO′ uns gezogen denken, OUO′UO ein Parallelogramm, dessen Diagonalen OO′ und UU′ sich einander gegenseitig halbiren. Die beiden an Größe gleichen und senkrecht auf die Fläche des Papiers nach oben hin wirkenden parallelen Kräfte in O und O′ sammeln sich in der Stelle H zu einer doppelt so großen und eben so nach oben hinwirkenden S, den gefundenen Eigenthümlichkeiten der parallelen Kräfte gemäß; gleicher Weise sammeln sich die nach unten hin wirkenden

gleichen und parallelen Kräfte in U und U' in der Stelle H zu einer doppelt so großen S', welche der S gerade entgegenwirkt, und weil alle Kräfte an O, O', U, U' einerlei Größe haben, so sind auch die Kräfte S und S' von gleicher Größe und halten einander das Gleichgewicht, was dann auch nothwendigerweise unsere beiden Drehzwillinge thun müssen.

§. 11. Mitwirkung der Molecularkräfte bei der Zusammensetzung mehrerer von außen auf einen festen Körper einwirkenden Kräfte.

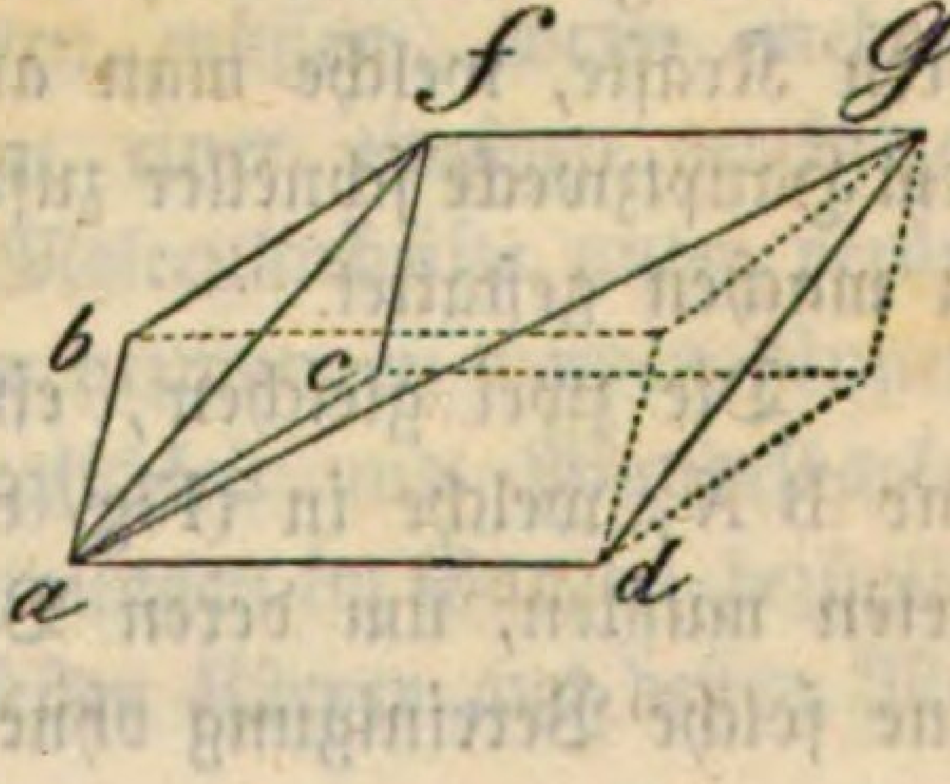
Die bisher entwickelten wenigen Sätze (Gesetze) bilden das Fundament von allen Bewegungs-Erscheinungen in festen Körpern; wir werden daher nur noch Weniges hinzufügen, theils um sie in größerer Deutlichkeit auftreten zu lassen, theils um die allgemeinsten Resultate, zu welchen sie führen, aus ihnen hervorzulocken.

Vor Allem hat man sich über die Art der Mitwirkung der Molecularkräfte zur Ermöglichung der im Vorigen angegebenen Erscheinungen eine klare Vorstellung zu machen. Das in dem Princípe ausgesprochene Gleichgewicht wäre offenbar unmöglich, wenn nicht die von der einen Kraft angegriffene Stelle durch die aus seiner Umgebung sich in Folge der Starrheit des Ganzen entwickelnden Kräfte zum Gleichgewicht gezwungen würde, und die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zieht nach sich, daß die gleiche Kraft wie in der angegriffenen Stelle in dieser Umgebung sich geltend macht. Diese muß wieder durch die entferntere Umgebung zum Gleichgewicht gebracht werden, dadurch aber neuerdings in dieser entfernteren Umgebung mit derselben Größe und Richtung als Gesammtergebniß auftreten und zuletzt durch die gleich große und entgegengesetzte Kraft in der zweiten angegriffenen Stelle ausgeglichen werden, wenn überhaupt das Gleichgewicht im Ganzen möglich werden soll. Dieses Gleichgewicht nun stellt sich nach der Aussage unseres Princips thatsächlich her, folglich muß der Hergang im Innern eines festen Körpers der hier angegebene sein.

Das von uns aus dem Principe bewiesene Parallelogramm der Kräfte ist einer Erweiterung auf 3 beliebige Kräfte fähig, die wir noch beifügen wollen.

Wirken auf die Stelle a (Fig. 14.) eines festen Körpers drei Kräfte in beliebigen, nicht in einer Ebene liegenden Richtungen ein, deren auf die Richtungen eingetragene Größen ab, ac, ad sind, so folgt aus dem Parallelogramm der Kräfte, daß die Einwirkung der beiden Kräfte ab und ac auf den festen Körper völlig gleich ist der von einer einzigen Kraft, welche ihrer Größe und Richtung nach dargestellt wird, durch die Diagonale af des des über bac beschriebenen Parallelogramms; es

Fig. 14.



üben sonach die drei ursprünglich gegebenen Kräfte völlig die gleiche Wirkung auf den festen Körper aus wie die zwei a f und a d. Die Einwirkung dieser beiden auf ihn aber ist aus dem gleichen Grunde der von einer einzigen Kraft gleich, deren Größe und Richtung durch die Diagonale a g des über f a d beschriebenen Parallelogramms ist, und man überzeugt sich leicht, daß diese Diagonale a g zugleich die des über ab, ac, a d beschriebenen Parallelepipeds ist, wie wir es durch die parallelen punktirten Linien angedeutet haben. Diese Construction der einen, an Wirkung dreien andern völlig gleichen Kraft hat den Namen des Parallelepipeds der Kräfte erhalten; es bleibt selbst dann noch richtig, wenn die drei anfänglichen Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, nur fallen dann die punktirten Linien mit den nicht punktirten in eine und dieselbe Ebene hinein, und tragen dann zur Bestimmung der Diagonale a g nichts mehr bei.

§. 12. Zerlegung der Kräfte, und noch andere Fälle, in denen die Zusammensetzung der Kräfte nur durch Mitwirkung der Molecularkräfte möglich wird.

Die durch das Parallelogramm oder Parallelepiped bewirkte Vereinigung von zwei oder drei an derselben Stelle des festen Körpers angreifenden Kräften in eine einzige Kraft ist es, was man unter der Benennung Zusammensetzung der Kräfte versteht; wenn aber zwei oder drei Kräfte ihrer Wirkung nach der von einer einzigen Kraft völlig gleich kommen, so kann man diesen Satz auch umkehren und sagen, daß diese eine Kraft jenen zweien oder dreien an Wirkung völlig gleich kommt. Diesem zu Folge kann man das Parallelogramm und Parallelepiped der Kräfte auch dazu benützen, um an die Stelle einer einzigen Kraft zwei oder drei andere zu setzen, die in ihrer Gesammtwirkung jener einen völlig äquivalent sind; man hat zu diesem Ende nichts weiter zu thun, als ein Parallelogramm oder Parallelepiped zu beschreiben, dessen Diagonale die Gerade ist, wodurch jene eine Kraft ihrer Richtung und Größe nach gegeben wird. Weil sich indeß über eine zur Diagonale genommenene Gerade unendlich viele Parallelogramme und Parallelepipede beschreiben lassen, so ist diese Auflösung der einen Kraft in mehrere andere, was man die Zerlegung der Kräfte nennt, ein sehr vieldeutiges Geschäft, das aber gerade dadurch nur um so einflußreicher wird, daß es an die mehreren Kräfte, welche man an die Stelle einer einzigen setzen will, verschiedene dem Hauptzwecke schneller zuführende, übrigens fast ganz beliebige Anforderungen zu machen gestattet.

Die zwei gleichen, einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte A M und B N, welche in (Fig. 8.) zu den parallelen Kräften A P und B Q hinzutreten mußten, um deren Vereinigung zu bewirken, geben zu verstehen, daß eine solche Vereinigung ohne Mitwirkung der Molecularkräfte überhaupt nicht

geschehen kann, was dann auch noch in dem Falle der (Fig. 9.) wahr bleibt, welcher Fall auf den vorigen zurückgeführt worden ist. Man sieht aber sogleich ein, daß die Vereinigungsstelle r der beiden parallelen Kräfte um so mehr nach oben hin rückt, je kleiner die Kräfte A M und B N werden, hingegen der Geraden A B sich um so mehr nähert, je größer sie werden, und sogar unter die Geraden A B hinabrücken kann, wenn die einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte eine entgegengesetzte Richtung annehmen. Was ist nun mit dieser Unbestimmtheit denn eigentlich gesagt? — Daß es nicht von der Natur der Kräfte, sondern von andern außer ihnen liegenden Umständen abhängt, welche von den Stellen der (Fig. 8.) durch q und T gelegten Graden sich zur Vereinigungsstelle der beiden parallelen Kräfte aufwirft. Treten keine anderweitigen Ursachen hinzu, so findet die Vereinigung ohne Zweifel an solchen Stellen des festen Köxpers statt, wo die erzeugten Spannungen im Körper die geringsten sein können, denn die Natur erreicht ihre Zwecke stets durch die geringsten Mittel; hat daher der feste Körper nur eine sehr geringe Breite zu beiden Seiten von der Linie A B, und es liegt in den übrigen Umständen, daß die beiden parallelen Kräfte sich zu einer einzigen vereinigen müssen, so muß der Puunkt r dieser Linie sich sehr nähern, es müssen demnach die Spannungen A M und B N eine sehr beträchtliche Größe erreichen, und der Körper wird zu zerreißen streben, wenn er nicht lieber durch Biegung seine Gestalt zu verändern sucht, was er meistens vorzuziehen scheint, wie die leichte Biegsamkeit der Glasfäden, eines an sich sehr spröden Körpers, anzeigt.

Zuweilen kann schon die Form des festen Körpers allein die Vereinigungsstelle der beiden parallelen Kräfte zu erkennen geben, wenn diese Form nämlich nur eine einzige Vereinigungsstelle zur Wahl überläßt, wie z. B. wenn der feste Körper in Fig. 8. aus einer starren Geraden AB und aus einer starren krummen oder gebrochen von A bis B reichenden Linie zusammengesetzt wäre, und an der Stelle, wo diese letzte Verbindung von der Geraden q T durchschnitten wird, zurückgehalten würde. Auch schon bei zwei in verschiedenen Stellen eines festen Körpers auftretenden Kräften, deren Richtungen sich schneiden, kann deren Vereinigung das Auftreten von Spannungen gebieterisch verlangen, wie z. B. jedesmal wenn der Durchschnittspunkt jener Richtungen nicht mehr eine Stelle des festen Körpers ist.

Was vorstehend über die Art und Weise gesagt worden ist, wie in vielen Fällen Spannungen in dem festen Körper auftreten müssen, wenn mehrere gleichzeitig in ihm wirkende äußere Kräfte sich zu einer einzigen vereinigen sollen, hatte blos den Zweck, zu zeigen, daß die Molecularkräfte unter veränderten Umständen in ganz anderer Weise aufzutreten gezwungen werden können. Es spricht sich darin eine erstaunlich große Beweglichkeit und Wandelbarkeit dieser Kräfte aus. Eine klare Auffassung der Spannungen im Ganzen bezüglich ihrer Größe und Richtung, wie sie sich in einem festen Körper aus dessen Mo-

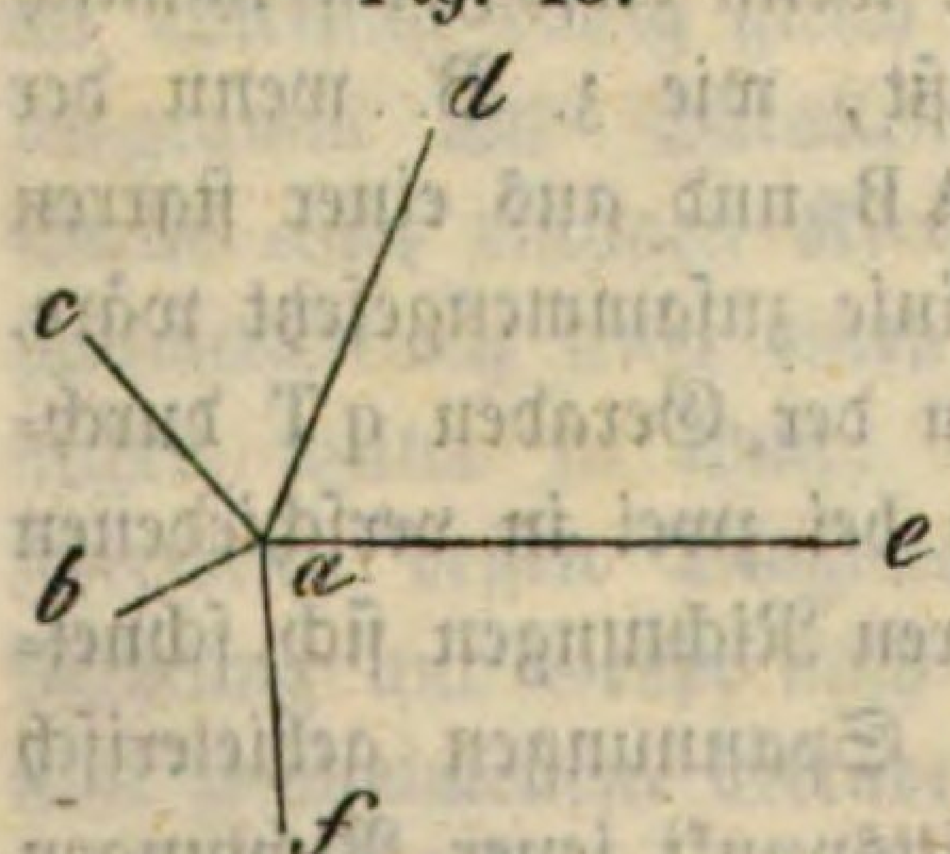
cularkräften herausarbeiten müssen, um die Vereinigung von andern auf ihn einwirkenden Kräften in's Werk setzen zu können, erleichtert die klare Einsicht in die daraus entspringende Erscheinung gar sehr, und darum hielten wir es für nichts Ueberflüssiges, das Nöthigste davon zu sagen; jetzt aber gehen wir zur Herleitung von einigen, für unsere Zwecke höchst wichtigen allgemeinen Ergebnissen aus obigen Sätzen über, denen wir die Erläuterung von einigen Kunstausdrücken vorausschicken wollen, um mittelst ihrer unserer Rede einen leichtern Gang zu verschaffen. Wir nennen in Fällen, wo sich die Wirkung von mehreren Kräften durch die Wirkung einer einzigen Kraft ersetzen läßt, oder wo umgekehrt eine einzige Kraft durch die äquivalente Wirkung von mehreren vertreten wird, die mehrern Kräfte **Seitenkräfte**, so wie die eine, diesen an Wirkung völlig gleich kommende, die **Mittelkraft**. Zur näheren Bestimmung werden wir diese Mittekraft als die zu diesen Seitenkräften gehörige, und umgekehrt diese Seitenkräfte als die dieser einen Mittelkraft entsprechenden bezeichnen.

§. 13. Allgemeine Sätze, die Vereinigung von Kräften in einem festen Körper betreffend.

Erstlich läßt sich zeigen, daß noch so viele einen und denselben materiellen Punkt angreifende Kräfte eine Mittelkraft besitzen, welche denselben Punkt angreift, und ihrer Richtung und Größe nach bestimmbar ist.

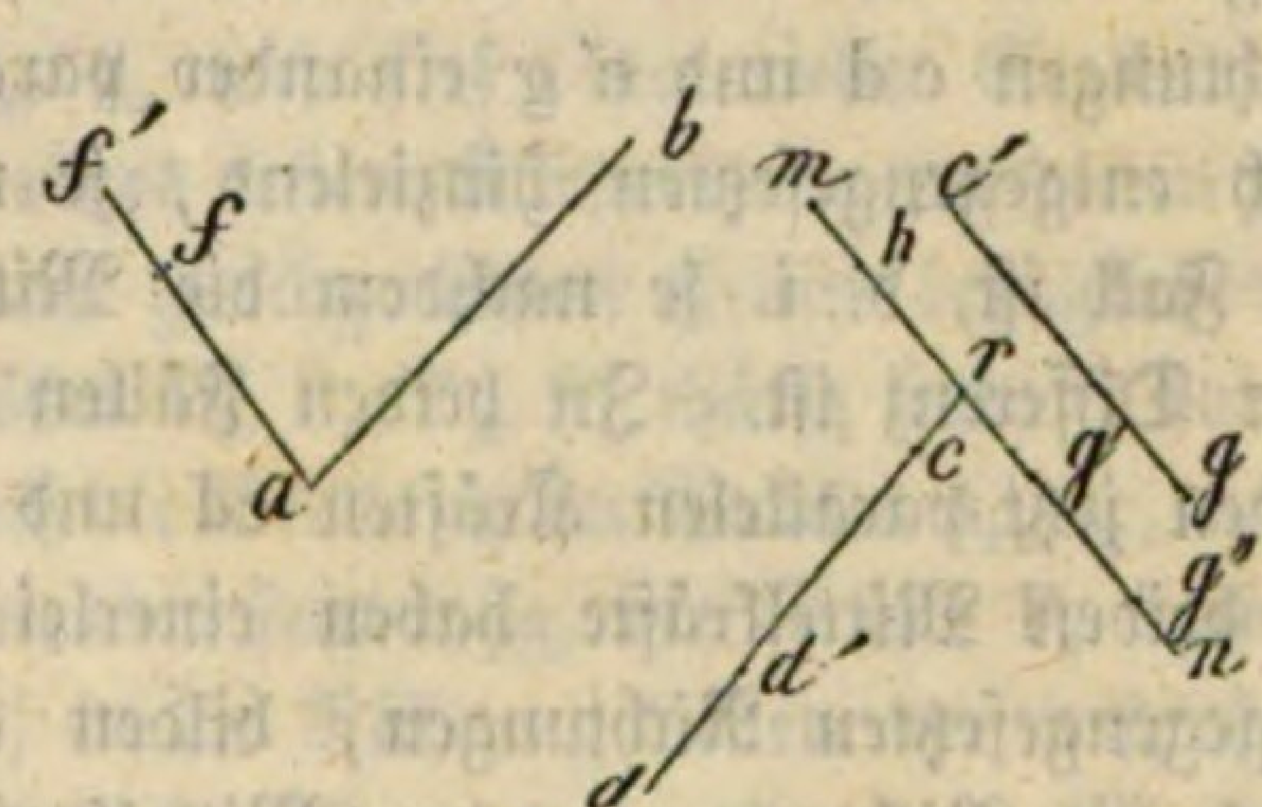
Stellt nämlich (Fig. 15.) a den angegriffenen Punkt vor, an welchem die Kräfte ab, ac, ad, ae, af wirksam sind, so läßt sich mittelst des Parallelogramms der Kräfte statt der Kräfte ab und ac eine einzige Kraft angeben, welche denselben Punkt angreift und ihrer Größe und Richtung nach durch die Diagonale des über bac beschriebenen Parallelogramms bestimmt wird und völlig die gleiche Wirkung auf den materiellen Punkt ausübt, wie die beiden aus denen sie entstanden ist. Diese eine Kraft in Verbindung mit den noch nicht verbrauchten auf den Punkt a einwirkenden bringt also auf den materiellen Punkt völlig die gleiche Wirkung hervor, wie die sämmtlichen zuvor in ihm thätigen. Dadurch aber ist die Anzahl der wirkenden Kräfte um Eins geringer geworden, und eine solche Verringerung der Anzahl von den jedesmal noch in Betrachtung kommenden Kräften kann man auf die gleiche Weise fort und fort wiederholen, bis man zuletzt nur auf eine einzige Kraft hingeführt worden ist, wobei jede neue Kraft, auf die man stößt, immer wieder den Punkt a angreift und ihrer Richtung und Größe nach durch die Diagonale des zuletzt beschriebenen Parallelogramms bestimmt ist.

Fig. 15.



Zweitens läßt sich zeigen, daß noch so viele auf einen und denselben festen Körper einwirkende Drehzwillinge, von welcher Art und Größe sie auch sein mögen, ihrer Wirkung nach auf einen einzigen Drehzwilling sich zurückführen lassen, dessen Moment so wie die Lage seiner Ebene bestimmbar ist.

Fig. 16.



Stellt man sich in (Fig. 16.) unter ab, cd einen den festen Körper in den Stellen a und c antreibenden Drehzwilling vor, und unter af, c′g einen zweiten denselben festen Körper in den Stellen a und c′ antreibenden, so kann man sich unter diesem zweiten jeden möglichen zum ersten hinzutretenden denken; denn gienge die Ebene des zum ersten hinzutretenden zweiten Drehzwillings nicht durch die Stelle a, so ist es, nach dem, was wir von der Natur der Drehzwillinge erkannt haben, gestattet, diese Ebene parallel mit sich selber zu verschieben, bis sie durch den Punkt a geht, dann wird jeder Drehzwilling af und c′g, dessen Kräfte in dieser neuen Ebene wirksam sind, auf den festen Körper völlig die gleiche Wirkung äußern, wie der, den er vertreten soll, wenn nur dessen Moment dem des letztern gleich genommen wird. Legt man jetzt durch cd eine Ebene parallel mit der fab, so wird sie die Ebene des Drehzwillings af, c′g in einer mit der af, somit auch mit der c′g parallelen Geraden mn schneiden, welche nicht parallel der cd läuft, wenn die Richtung af nicht mit der ab zusammenfällt. Da die Gerade mn stets in der Ebene des Drehzwillings af, c′g liegt, so läßt sich letzterer immer durch einen andern ersetzen, dessen Kräfte längs der Geraden af und mn thätig sind, man hat zu diesem Ende dessen Kräfte nur von solcher Größe zu nehmen, daß ihr Moment dem des Drehzwillings af, c′g gleich wird. Die eine dieser Kräfte lassen wir in a von a nach f hin wirksam sein und stellen deren Größe durch af′ vor, die andere stellen wir uns in irgend einem Punkte h der Geraden mn nach der entgegengesetzten Seite hin wirksam vor, und bezeichnen deren der af′ gleiche Größe durch hg′. Da nun af′ und ab beide in dem Punkte a wirksam sind, so setzen sich dieselben, so oft nicht beide in einer und derselben Geraden liegen, in eine einzige Kraft zusammen, deren Richtung und Größe durch die Diagonale des über f′ab beschriebenen Parallelogramms gegeben ist. Dann aber schneiden sich auch die in der durch cd und mn gehenden Ebene liegenden Geraden cd und hg′ in einem Punkte r, in welchem man sich die Kräfte cd und hg′ mit unveränderter Stärke und Richtung wirkend denken darf, und deren Mittelkraft man findet, wenn man die Länge cd von r bis d′, die hg′ von r bis g″ trägt und über d′rg″ ein Parallelo-

gramm beschreibt, sie wird nämlich dargestellt durch die von r auslaufende Diagonale dieses Parallelogramms, und da die Seiten rd′ und rg″ dieses Parallelogramms, denen ab und af′ gleich, parallel und gegenläufig sind, so folgt, daß die beiden Mittelkräfte einerlei Größe und parallele aber gegenläufige Richtungen haben, sonach einen einzigen Drehzwilling bilden, dessen Ebene und Drehmoment sich angeben läßt. Hätten zufällig die beiden Richtungen af und ab einer und derselben Geraden angehört, so wären die Richtungen cd und c′g einander parallel und zwar nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten hinzielend, je nachdem es bei den Kräften ab und af der Fall ist, d. i. je nachdem die Mittelkraft von diesen beiden deren Summe oder Differenz ist. In beiden Fällen wird aber auch die Mittelkraft von den beiden jetzt parallelen Kräften cd und c′g deren Summe oder Differenz, und die beiden Mittelkräfte haben einerlei Größe und wirken in parallelen aber entgegengesetzten Richtungen, bilden also einen Drehzwilling, dessen Ebene durch die Richtung von der Mittelkraft der beiden parallelen Kräfte cd und c′g und durch die Gerade, in welcher ab und af liegen, bestimmt wird, also bekannt ist. In dem einzigen Falle, wo die Kräfte cd und c′g gleiche Größe und entgegengesetzte Richtungen haben, lassen sie sich nicht in eine einzige Kraft zusammen setzen, sondern liefern einen Drehzwilling, dann aber sind die in einer Geraden liegenden Kräfte ab und af einander gleich und entgegengesetzt und halten deßhalb einander das Gleichgewicht. Es liefern folglich unter allen Umständen die beiden ursprünglich gegebenen Drehzwillinge einen einzigen Drehzwilling, dessen Ebene und Moment man angeben kann, und der nur dann verloren geht, wenn dieses Moment null wird.

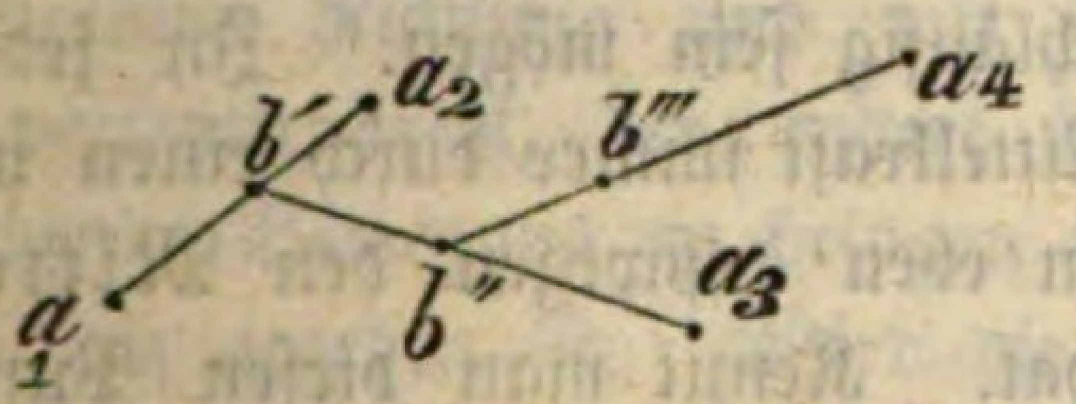
Nachdem wir gesehen haben, daß sich unter allen Umständen zwei gegebene, auf einen und denselben festen Körper wirkende Drehzwillinge durch einen ersetzen lassen, ist es nicht mehr schwer einzusehen, daß sich noch so viele, auf einen und denselben festen Körper wirkende Drehzwillinge stets in einen einzigen Drehzwilling zusammensetzen lassen, dessen Ebene und Moment man angeben kann. Denn hat man drei Drehzwillinge, so kann man den einen finden, der zwei von diesen in sich enthält, und dann läßt sich aus diesem und dem dritten wieder der eine auffinden, der alle drei in sich enthält. Hat man 4 Drehzwillinge, so läßt sich aus dreien von ihnen auf die eben angezeigte Weise der eine finden, der diese drei in sich enthält, und dann aus diesem letzteren und dem vierten der eine, der alle vier in sich enthält. So fortfahrend lassen sich aber noch so viele Drehzwillinge in einen einzigen umwandeln, der die gleiche Wirkung auf den festen Körper ausübt, wie jene vielen. Man kann bei Drehzwillingen die Benennung Seitenzwillinge und Mittelzwillinge in dem gleichen Sinne einführen, wie bei den gewöhnlichen Kräften.

§. 14. Noch ein allgemeines Ergebniß.

Drittens läßt sich bei noch so vielen parallelen, die Innenpunkte eines festen Körpers nach derselben Seite des Raumes antreibenden Kräften stets die eine Mittelkraft ihrer Größe und Richtung nach angeben, welche die gleiche Wirkung auf den festen Körper hervorbringt, wie die vielen parallelen Kräfte.

Denn stellen (Fig. 17.) a_1, a_2, a_3, a_4 und s. f. materielle Stellen im Innern eines festen Körpers vor, an denen parallele und gleichgerichtete Kräfte bezüglich von den Größen P_1, P_2, P_3, P_4 thätig sind, so haben, was auch die Stellung der Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 gegeneinander sein mag, die Kräfte P_1 und P_2 eine Mittelkraft von der Größe $P_1 + P_2$, deren Richtung denen der ursprünglich gegebenen Kräfte parallel und gleichläufig ist und durch einen Punkt b′ der Geraden $a_1 a_2$ geht, der sich aus der Gleichung

Fig. 17.



$$a_1 b'.\ P_1 = a_2 b'.\ P_2 \qquad \text{(a)}$$

finden läßt, dem an der (Fig. 8.) entwickelten Satze gemäß. Aus dem gleichen Grunde haben die an den Stellen b′ und a_3 wirkenden parallelen Kräfte $P_1 + P_2$ und P_3 eine Mittelkraft von der Größe $P_1 + P_2 + P_3$, deren Richtung denen der ursprünglich gegebenen Kräfte parallel und gleichläufig ist und durch einen Punkt b″ der Geraden b′ a_3 hindurch geht, welcher sich aus der Gleichung

$$b'b''.\ (P_1 + P_2) = a_3 b''.\ P_3 \qquad \text{(b)}$$

finden läßt, und diese Mittelkraft ist zugleich die Mittelkraft von den 3 Kräften P_1, P_2 und P_3. Kommt zu diesen 3 Kräften noch die 4te P_4, so ergiebt sich als Mittelkraft von der im Punkte b″ thätigen Kraft von der Größe $P_1 + P_2 + P_3$ und der Kraft P_4 eine Mittelkraft von der Größe $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, deren Richtung denen der ursprünglich gegebenen Kräfte parallel und gleichläufig ist und durch einen in der Geraden b″ a_4 liegenden Punkt b‴ hindurch geht, der sich aus der Gleichung

$$b''b'''.\ (P_1 + P_2 + P_3) = a_4 b'''.\ P_4 \qquad \text{(c)}$$

finden läßt, und es ist diese letzte Mittelkraft zugleich auch die der vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4. So fortfahrend gelangt man zur Mittelkraft von noch so vielen parallelen und gleichläufigen auf einen festen Körper wirkenden Seiten-Kräften und findet stets,

daß die Größe dieser Mittelkraft die Summe aller Seitenkräfte und ihre Richtung den Richtungen dieser Seitenkräfte parallel und gleichläufig ist. Auch gelangt man durch successive Bestimmung der Punkte b′, b″, b‴ u. s. f. zuletzt zu der Stelle des festen Körpers, wodurch die Richtung dieser Mittelkraft hindurch geht.

Es ist bemerkenswerth, daß die Bestimmung der Punkte b′, b″, b‴ u. s. f. nichts weiter verlangt, als daß die Richtungen von allen Seitenkräften einer und derselben beliebig gedachten Richtung parallel und gleichläufig seien; man findet daher mittelst der angezeigten Gleichungen stets dieselben Punkte b′, b″, b‴ bis zum letzten, wie man sich auch die Richtung der parallelen Kräfte denken mag. Die letzte dieser Stellen, durch welche die Richtung der Mittelkraft von allen Seitenkräften hindurch geht, bleibt also die gleiche so lange dieselben Stellen des festen Körpers von Kräften, welche ihre Größe nicht ändern, angegriffen werden, welcher von allen denkbaren Richtungen die Richtungen dieser einzelnen Kräfte auch parallel und gleichläufig sein mögen. In jedem solchen Falle geht also die Richtung der Mittelkraft immer durch einen und denselben Punkt des festen Körpers, den man eben deßwegen den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** genannt hat. Kennt man diesen Punkt, so kann man ohne alle weitere Untersuchung die Mittelkraft ihrer Größe und Richtung nach völlig bestimmt angeben, weil diese Richtung durch den als bekannt vorausgesetzten Mittelpunkt der parallelen Kräfte hindurch gehen muß. Außerdem verdient hier noch hervorgehoben zu werden, daß das Auffinden der Punkte b′, b″, b‴..... mittelst der vorstehenden Gleichungen fortwährend das Gleiche bleibt, wenn auch statt der Kräfte P_1, P_2, P_3... andere, ihnen jedoch proportionale genommen werden.

Mittelst der vorstehenden Verallgemeinerungen unserer Fundamentalsätze über das Zusammenwirken der Kräfte in einem festen Körper sind wir nun im Stande, das Spiel von noch so vielen beliebigen Kräften im Innern eines festen Körpers mit Leichtigkeit zu überblicken, und das Resultat davon in jedem Falle mit Sicherheit vorauszusagen. Sind nämlich a_1, a_2, a_3 u. s. f. von beliebigen Kräften angegriffene Stellen im Innern eines festen Körpers und wählt man irgend eine Stelle m*) in demselben Körper, die einer von den vorigen Angriffspunkten sowohl, wie auch eine davon verschiedene sein kann; denkt man sich ferner an dieser Stelle alle diejenigen Kräfte wirkend, welche Drehzwillinge mit den an a_1, a_2, a_3 u. s. f. vorhandenen bilden, zugleich aber auch noch alle die, welche mit den eben angehängten das Gleichgewicht halten, und die man sich daher diesen an Größe gleich und mit Richtungen in denselben Geraden, wie die Richtungen dieser liegend, aber nach entgegengesetzten Seiten hin strebend, zu denken hat: so bringen, kraft des Satzes der gleichen Wirkung, alle ursprünglichen Kräfte in Verbindung mit den so eben angehängten dieselbe Wirkung auf den festen Körper hervor, wie die ursprünglichen

*) Im Allgemeinen zwar kann diese Stelle eine völlig beliebige mit dem Körper fest verbundene sein. Jedoch wird es sich in der Bewegungslehre zeigen, daß hierzu am vortheilhaftesten nur ein einziger Punkt, von welchem dort die Rede sein wird, gebraucht werden kann, weil dieser gestattet, die fortschreitende und drehende Bewegung eines Körpers völlig getrennt von einander zu verfolgen.

Kräfte allein. Die ursprünglichen Kräfte in Verbindung mit den angehängten bestehen aber aus einer gewissen Anzahl von Drehzwillingen (welche sich dem zweiten allgemeinen Satz §. 13. gemäß auf einen einzigen als bekannt anzusehenden Drehzwilling zurückführen lassen) und aus einer Anzahl von gewöhnlichen Kräften (welche sämmtlich auf den Punkt m einwirkend angesehen werden können, und daher dem ersten allgemeinen Satze §. 13. gemäß durch eine einzige, den Punkt m angreifende, als bekannt anzusehende Kraft ersetzt werden können). Hieraus folgt, daß man sich jegliche Wirkung von Kräften auf einen festen Körper als aus zwei Theilen bestehend denken darf, von welchen der eine den Körper in bestimmter Richtung und mit gegebener Stärke in fortschreitende Bewegung zu versetzen strebt, der andere dagegen denselben Körper gleichzeitig in eine drehende Bewegung zu bringen sucht, deren Art und Weise durch den Mittelzwilling gegeben ist. Wird die Mittelkraft null, so nimmt der feste Körper gar keine fortschreitende Bewegung an, und zeigt sich das Moment des Mittelzwillings null, so findet keine Drehung des festen Körpers statt; ist aber sowohl jene Mittelkraft wie dieser Mittelzwilling null, so bringen die wirkenden Kräfte gar keine Wirkung auf den festen Körper hervor, d. h. dieser befindet sich im Gleichgewicht. *)

Ein Beispiel von einer fortschreitenden und zugleich drehenden Bewegung liefert unsere Erde, während sie ihre Bahn im Weltenraume durchläuft. Zu fortschreitenden Bewegungen ohne Drehung gibt die Natur häufig Anlaß, namentlich, jedoch nicht immer, da, wo die Bedingungen des in diesem Paragraph gegebenen dritten verallgemeinerten Satzes vorhanden sind. Drehende Bewegung ohne Fortschreitung kommt selten vor, wenn nicht durch Verbindung des festen Körpers mit einer unverrückbaren Axe dessen fortschreitende Bewegung durch Zwang gänzlich zurückgehalten wird, und dadurch dessen drehende Bewegung allein zur Anschauung kommt. Der Kreisel bietet ein Beispiel dar von einer gleichzeitig drehenden und fortschreitenden Bewegung, die jedoch durch äußern Zwang gewissen Beschränkungen unterworfen ist.

Wir haben in diesem Kapitel eine zwar sehr gedrängte, aber doch ziemlich vollständige Darstellung von der Art und Weise gegeben, wie die Endwirkung aller in einem festen Körper thätigen Kräfte aufgefunden werden kann. Das Auffinden der Mittel, wodurch sich dieses Geschäft möglichst leicht und genau abmachen läßt, hat man einer eigenen Wissenschaft der Statik fester Körper übertragen. Eine auf die hier mitgetheilten Grundvorstellungen aufgebaute Statik ist die von Poinsot, welche mehrfach in's Deutsche übersetzt worden ist.

*) Diese Darstellung setzt allerdings voraus, daß die Mittelkraft durch den in voriger Note bezeichneten Punkt hindurch gehe, was aber stets auf die in §. 20. bei Fig. 21. angegebene Weise bewerkstelligt werden kann.

Kapitel III.

Von der Bewegung eines festen Körpers.

§. 15. Maaß und allgemeine Beschaffenheit der zur Bewegung antreibenden Kräfte.

Wir haben unter dem Worte Kraft die Ursache verstanden, wodurch ein Atom zu einer Bewegung in bestimmter Richtung und mit bestimmter Geschwindigkeit angetrieben wird, und wir haben diese Geschwindigkeit zum Maaße für die Größe der im Atom wirkenden Kraft genommen. Daß die Kraft in einer und derselben bewegten Masse stets ihrer Geschwindigkeit proportional sei, hat man in der Bewegungslehre als ein Axiom hinzunehmen, das in der Gesammtheit aller Bewegungserscheinungen seine volle Rechtfertigung findet. Es bildet dieser Satz gewissermassen das Prinzip für die ganze Bewegungslehre.

Denkt man sich zwei völlig gleiche Atome, welche beide durch eine Kraft von gleicher Größe zu Bewegungen in parallelen und gleichläufigen Richtungen mit einerlei Geschwindigkeit angetrieben werden, so findet während dieser Bewegung keine Aenderung in der gegenseitigen Lage und Stellung der beiden Atome statt; theilt man ferner in Gedanken diesen zwei Atomen das Vermögen mit, ihre gegenseitige Stellung und Lage durch kein Mittel aufheben zu lassen, wodurch deren Bewegung in Nichts gestört würde, so stempelt man dadurch den Verein der zwei Atome zu einem einzigen Atom, der aber die Kräfte der zwei in ihm enthaltenen, also die doppelte von einer der vorigen, in sich trüge. Dieser eine Atom hätte dann aber offenbar die doppelte Masse derer, aus welchen man ihn hervorgegangen gedacht hat. Man ist sonach gezwungen, die Kräfte in zwei mit einerlei Geschwindigkeit sich bewegenden Atomen als verschiedene anzunehmen, sowie man sich deren Massen als ungleiche denkt, und zwar muß man sich bei gleicher Geschwindigkeit die Kraft in dem Atom von doppelter Masse als die Doppelte von der im Atome von einfacher Masse vorstellen. Auf dieselbe Weise, wie man sich hier zwei Atome von gleicher Masse und gleicher paralleler Bewegung zu einem einzigen Atome vereinigt gedacht hat, so kann man auch drei, vier und mehr solche Atome zu einem einzigen vereinigt sich denken, und dann zeigen dieselben Betrachtungen, daß man sich die Kraft, welche diesen einen Atom in eine Bewegung von gewisser Geschwindigkeit versetzt, so vielmal größer als die Kraft denken müsse, welche in einem der einzelnen in ihm enthaltenen Atome thätig ist, als man solcher Atome in ihm vereinigt gedacht hat. Durch analoge Betrachtungen wird man zu der allgemeinen Einsicht hingeführt, daß die Kräfte in zweierlei Massen,

welche sich mit einerlei Geschwindigkeit bewegen, sich zu einander verhalten, wie diese Massen selber; denn wird die eine Masse durch die ganze Zahl m, die andere durch die ganze Zahl n vorgestellt, so kann man sich jene aus m, diese aus n einander gleichen Masseneinheiten zusammengesetzt denken, und dann enthält jene m, diese n solcher Kräfte in sich, wodurch die Masseneinheit in eine Bewegung von derselben Geschwindigkeit gebracht werden kann. Mithin verhalten sich die Kräfte in den beiderlei, mit einerlei Geschwindigkeit sich bewegenden Massen zu einander, wie die ganzen Zahlen m und n, d. h. wie die Massen selber.

Hieraus läßt sich nun sogleich weiter der Schluß ziehen, daß man ein Maaß für die Größe der in einer bewegten Masse befindlichen Kraft erhält, wenn man diese Masse mit ihrer Geschwindigkeit multiplizirt und dieser Zahl die Kraft als Einheit zu Grunde legt, welche die mit der Geschwindigkeits-Einheit bewegte Massen-Einheit in sich trägt. Denn wird die Masse durch die Zahl m vorgestellt, so enthält sie m Masseneinheiten in sich, also hat die bewegte Masse m solche Kräfte in sich, wie sie der in die gleiche Bewegung versetzten Masseneinheit zukommen, wie aus dem so eben aufgestellten Satze unmittelbar hervorgeht; wird ferner die Geschwindigkeit der bewegten Masse durch die ganze Zahl v vorgestellt, so enthält die mit dieser Geschwindigkeit bewegte Masseneinheit v solche Kräfte in sich, wie sie der mit der Geschwindigkeits-Einheit bewegten Masseneinheit zukommen, dem Satze gemäß, daß die Kräfte in gleichen Massen ihren Geschwindigkeiten proportional sind. Aus der Verbindung dieser letzten Vergleichung mit der ihr vorangegangenen geht aber unmittelbar das zuvor ausgesprochene Maaß der in einer bewegten Masse befindlichen Kraft hervor; diese in einer bewegten Masse befindliche Kraft pflegt man auch deren Größe der Bewegung zu nennen.

Wir können uns die zwischen zwei Körpern von endlicher Größe wahrnehmbaren Bewegungs-Erscheinungen nicht anders begreiflich machen, als dadurch, daß wir annehmen, sie seien die Mittelwirkung von allen den Seitenwirkungen, welche von jedem Atom des einen Körpers auf jeden Atom des andern Körpers ausgeübt werden. Die Bewegung eines Körpers erscheint uns dann als eine Zusammensetzung aus den unzählig vielen Bewegungen seiner Atome, und da diese letzteren, selbst wenn sie sich einander gegenseitig unterstützen, doch immer nur ein endliches, meßbares Resultat zu Tage fördern, so müssen wir die zwischen den Atomen verschiedener Körper eingeleiteten Wirkungen unvergleichlich kleiner uns denken, als die, welche wir an Körpern von endlicher Größe wahrzunehmen im Stande sind. Ja selbst wenn wir die in einem Atome des einen Körpers erzeugte Mittelwirkung in's Auge fassen, welche aus den Einwirkungen sämmtlicher Atome eines andern Körpers auf ihn entspringt, und die in der Regel schon unzählig viele Wirkungen von

Atom zu Atom in sich aufgenommen hat, müssen wir uns doch immer noch diese Mittelwirkung in einem Atome des einen Körpers unvergleichlich kleiner denken, als die aus sämmtlichen Mittelwirkungen seiner Atome hervorgehende Gesammtwirkung dieses Körpers. Wir werden so auf Wirkungen hingeführt, die bezüglich ihrer Größe von verschiedenen Ordnungen sind; die kleinsten sind die, welche von einem Atome auf einen andern in bestimmter Entfernung von jenem liegenden ausgeübt werden; von einer höheren Ordnung sind die, welche von sämmtlichen Atomen eines Körpers auf einen in gegebener Entfernung von diesem liegenden Atom hervorgerufen werden; von einer noch höheren Ordnung endlich ist die Mittelwirkung, welche in einem Körper aus der Gesammtwirkung eines von diesem in gegebener Entfernung liegenden andern Körpers auf die sämmtlichen Atome des erstern entspringt. Es ist Sache der Statik, diese verschiedenen Wirkungen in größter Schärfe zu berechnen, und dazu hat sie weiter nichts nöthig, als die Kenntniß von der Art und Weise, wie sich die Wirkung zwischen zwei Atomen gestaltet. Eine Analyse der verschiedensten Bewegungserscheinungen nun hat gezeigt, daß man die zwischen zwei Atomen von verschiedenen Körpern eingeleitete Wirkung ihrer Größe nach stets dem Produkt aus den Massen der beiden Atome direkt proportional und dem Quadrate ihres Abstandes von einander umgekehrt proportional, ihre Richtung aber stets in die beide Atome vereinigende Gerade zu setzen habe, um hieraus die Gesammteinwirkung zweier Körper auf einander genau und vollständig ableiten zu können. In diesem einfachen Gesetze scheint sich die Wirkungsweise der gesammten anorganischen Natnr zu concentriren, in so weit wenigstens als diese Wirkungen von Körper zu Körper geschehen; vielleicht dehnt sich dieses Gesetz sogar auch noch über den ganzen Kreis der Molecularwirkungen aus.

Die Wirkungen zwischen zwei Atomen, aus denen sich die Wirkungen zwischen zweien Körpern zusammensetzen, besitzen noch eine andere Eigenthümlichkeit, die in Folgendem besteht. Es setzen nämlich zwei aufeinander wirkende Atome ihre Thätigkeit durch alle Zeit hindurch fort, so daß sich in jedem Augenblicke eine neue Kraft, deren Richtung und Größe von der Lage und dem Abstande, welche den beiden Atomen in demselben Augenblicke zukommen, auf die so eben angezeigte Weise abhängig ist, zu der zuvor in ihnen enthaltenen Mittelwirkung hinzutritt und sich jedesmal mit dieser zu einer einzigen neuen Mittelwirkung verbindet. Der gleiche Umstand findet dann aber nothwendig auch bei den Mittelwirkungen selber statt, es tritt in jedem Augenblicke zu der im Körper schon vorhandenen Mittelwirkung eine neue hinzu, welche aus den in diesem Augenblicke neu hinzutretenden Kräften hervorgeht, und wodurch jene im Allgemeinen eine Abänderung erleiden wird; deshalb wird es nothwendig bei der Bestimmung der in einem Körper vor sich gehenden Bewegungserscheinungen, stets auf die Zeit, in der man sie wahrnimmt, als ein wesentliches

Element Rücksicht zu nehmen, indem diese Erscheinungen zu verschiedenen Zeiten in sehr verschiedener Weise auftreten können. Hierin liegt auch der Grund, warum man sich die augenblickliche Einwirkung auf den Körper im Allgemeinen unvergleichlich kleiner zu denken hat, als die im Laufe der Zeit successive in ihn hineingerathenen und mit einander in Verbindung getretenen. Es können jedoch die augenblicklich hinzutretenden Kräfte in besonderen Fällen die vor deren Auftreten vorhandene Wirkung verringern und nach und nach auch wohl gänzlich vernichten, wo dann als Ausnahme die entstandene Wirkungslosigkeit nicht mehr als sehr groß in Vergleich zu der mit ihr sich vereinigenden Wirkung im nächsten Augenblicke anzusehen wäre. Die hier besprochenen Augenblickskräfte sind es, welche zur Wahrnehmung gelangen, da wo die Bewegung, in die ein Körper vermöge in ihm thätiger Kräfte gerathen will, immer wieder durch äußere ihnen entgegentretende Kräfte zur Ruhe gezwungen wird. In diesem Falle sind in dem Augenblicke, wo eine neue Einwirkung den Atom oder Körper ergreift, alle früheren schon gänzlich aufgehoben, so daß diese eine allein in die Wahrnehmung fällt. Die unter solchen Umständen isolirt hervortretende Augenblickswirkung hat den Namen Druck erhalten, sowie man unter Gegendruck die dem Drucke das Gleichgewicht haltende Wirkung versteht.

§. 16. Von der geradlinigen Bewegung.

Um die im vorigen Paragraph besprochenen Schwierigkeiten, welche bei der Bewegung der Körper in der Natur auftreten, nach und nach zu überwältigen, wollen wir vorerst nur die Bewegung eines einzigen Atoms betrachten, und die Zeiten, wo neue Kräfte in ihm auftauchen, als in meßbaren Zwischenräumen auseinanderliegend voraussetzen.

Wenn ein Atom durch eine Kraft in Bewegung gesetzt worden ist, so bewegt sich derselbe in einer durch die Natur dieser Kraft bestimmten Richtung und mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit fort, so lange, als derselbe nicht durch andere außer ihm liegende Ursachen zu einer Abänderung dieser Bewegung gezwungen wird.

Diese in allen anorganischen Dingen bei genauerer Aufmerksamkeit ohne Ausnahme zu beobachtende Eigenschaft, wonach sie den Zustand, welchen sie einmal angenommen haben, ohne äußere Veranlassung dazu nie aufgeben, hat man das Gesetz der Trägheit genannt. Auch organische Dinge ändern wohl nie ihren einmal eingenommenen Zustand ohne Ursache ab; bei diesen aber kommen häufig Zustandsänderungen vor, für welche sich keine außer ihnen liegenden Ursachen auffinden lassen. Man sieht sich dann gezwungen, für dergleichen Zustandsänderungen in den Dingen selbst liegende Ursachen anzunehmen, und bezeichnet alle solche in dem organischen Dinge vorhandenen Ur-

fachen summarisch durch das Wort Lebenskraft, sowie man die Summe aller aus der Lebenskraft entspringenden Erscheinungen in dem organischen Dinge sein Leben nennt. Aus dem Umstande, daß der Zustand eines anorganischen bewegten Dinges ohne den Hinzutritt einer später hinzukommenden äußeren Veranlassung sich nicht ändern kann, folgt nun ohne weiters, daß der in Bewegung gerathene Atom von jeder Stelle aus seine Bewegung in der gleichen Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fortsetzt, bis er durch eine äußere Ursache zu einer Abänderung dieser Bewegung gezwungen wird; es muß also der Weg, den der Atom zurücklegt, seine Bahn, einer geraden Linie angehören und ohne Unterlaß der Zeit proportional sein, die verflossen ist, vom Anfang der Bewegung an, d. h. von der Stelle ab, von welcher man sich die Bewegung anhebend denkt, bis zu dem Augenblicke hin, wo man die Bewegung als beendigt ansehen will. Bezeichnet man also den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg, d. h. die Geschwindigkeit der Bewegung durch v und den in t Zeiteinheiten in Folge einer derartigen Bewegung zurückgelegten Weg durch s, so ist immer

$$1 : v = t : s,$$

woraus folgt

$$s = vt. \qquad (1.)$$

In dieser Gleichung spricht sich die volle Beschaffenheit einer durch äußere Ursachen nicht veränderten Bewegung aus, die wir eben deßwegen unveränderte Bewegung nennen werden. Unveränderte Bewegungen kommen in der Natur nur höchst selten vor, weil in ihr stets Ursachen zur Veränderung in großer Menge vorhanden sind; demungeachtet ist die unveränderte Bewegung von großer Wichtigkeit, denn es liegt in ihr der Grund zu allen abgeänderten Bewegungen. Wir werden nun hier, wo wir von den Kräften ganz im Allgemeinen handeln, einige Beispiele von veränderten Bewegungen mittheilen, die zwar nicht aus der Werkstätte der Natur herstammen, sondern blos ideal, aber doch ganz geeignet sind, uns einen Blick in das Getriebe der Natur thun zu lassen.

Beispiel 1. Wir denken uns einen Atom, der in einem gewissen Augenblicke durch eine Kraft, deren Größe durch die Geschwindigkeit v gegeben ist, in eine unveränderte mit bestimmter Richtung versehene Bewegung gesetzt wird. Nach Ablauf der Zeit t, von jenem Augenblicke an gerechnet, wird diese Bewegung abgeändert durch eine Kraft von derselben Richtung und Größe, wie die vorige, die sich zu dieser im Atom hinzugesellt. Der Atom hält die so abgeänderte Bewegung wieder die Zeit t über ein, worauf wieder eine Kraft von derselben Größe und Richtung in ihn eintritt, und dies erfolgt fort und fort nach jedem Zeitraum von der Länge t. Es soll die ganze Beschaffenheit der so stoßweise abgeänderten Bewegung angegeben werden.

Im ersten Zeitraume von der Länge t, wo der Atom sich unverändert mit der Geschwindigkeit v bewegt, legt er den Weg vt zurück, der vorstehenden Gleichung gemäß.

Im zweiten Zeitraume von der Länge t, wo der Atom von der doppelt so großen Kraft in derselben Richtung getrieben wird, ist seine Geschwindigkeit 2v und dieser zur Folge legt er in diesem zweiten Zeitraum, in derselben Geraden wie zuvor bleibend, den Weg 2vt zurück. Im dritten Zeitraume von der Länge t wird der Atom von einer dreifachen Kraft in derselben Richtung getrieben, darum ist seine Geschwindigkeit hier 3v und er legt in diesem Zeitraume, immer längs derselben Geraden sich fortbewegend, den Weg 3vt zurück. So wird in jedem folgenden Zeitraum seine Geschwindigkeit stets um v größer, so wie der in diesem Zeitraum von ihm zurückgelegte Weg jedesmal um vt größer als im vorhergehenden. Wir wollen diesen Hergang zur besseren Uebersicht in folgendem Schema darstellen:

In den einzelnen Zeiträumen	erlangte Geschwindigkeit	zurückgelegter Weg
im ersten Zeitraum t	v	vt
„ zweiten „ t	2v	2vt
„ dritten „ t	3v	3vt
in einem beliebigen nten Zeitraum von der Länge t	u. s. f. nv	u. s. f. nvt

Aus diesem Schema geht hervor, daß wenn man nach Ablauf der n Zeiträume von der Länge t keinen neuen Anstoß mehr denken, sondern von da ab die Bewegung als eine unveränderte ansehen will, und $nt = T$ sein läßt, die Geschwindigkeit zu Ende der Zeit T gleich nv oder gleich $T\frac{v}{t}$ sein werde, demnach findet, wenn man diese Endgeschwindigkeit durch V bezeichnet, die nachstehende Gleichung statt:

$$V = nv = T\frac{v}{t}. \qquad (2.)$$

Ferner geht aus obigem Schema hervor, daß der in sämmtlichen n Zeiträumen von der Länge t zurückgelegte Weg, der durch den Buchstaben S vorgestellt werden mag, die Summe von allen in der dritten Columne stehenden Wegen ist, die in den einzelnen Zeiträumen zurückgelegt worden sind, so daß man hat

$$S = (1 + 2 + 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;. + n)\,vt.$$

Die in den Klammern stehenden n Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, deren Summe wird daher gefunden, wenn man das erste und letzte Glied addirt und das Ergebniß mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. Man kann also die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$S = \frac{(n+1)\,n}{2}\,v\,t.$$

Diese Gleichung geht, wenn man für nt seinen Werth T setzt, über in:

$$S = \frac{n.\,v + v}{2}\,T$$

und wird, wenn V für nv gemäß der Gleichung (2.) geschrieben wird:

$$S = \frac{v + V}{2}\,T\,; \qquad (3.)$$

es ist aber v die Geschwindigkeit, womit die von uns betrachtete Bewegung begonnen hat, und V die Geschwindigkeit am Ende der in sie eingegangenen Veränderungen, weßhalb die Gleichung (3.) in Worten auch so ausgesprochen werden kann:

Man erhält den Weg, den ein Atom in Folge von in gleichen Zeiträumen stets in der gleichen Richtung geschehenden Einwirkungen von unveränderlicher Größe zurücklegt, bis zu der Zeit T hin, welche eine beliebige Anzahl von jenen Zeiträumen in sich begreift, wenn man diese Zeit T mit dem arithmetischen Mittel zwischen der Anfangsgeschwindigkeit v und der Endgeschwindigkeit V multiplicirt.

Der blose Hinblick auf die Gleichung (2.) giebt zu erkennen, daß bei einer Bewegung von der hier beschriebenen Art die einer gegebenen Zeit T entsprechende Geschwindigkeit V die gleiche bleibt, so oft $\frac{v}{t}$ in ihr denselben Werth behält. Denken wir uns verschiedene solche Bewegungen, wobei $\frac{v}{t}$ stets den gleichen Werth G hat, so ist für alle diese

$$V = TG\,; \qquad (4.)$$

je kleiner aber v und t werden, desto mehr t werden in der gegebenen Zeit T enthalten sein, d. h. desto größer wird, weil T = nt ist, die Zahl n werden, und in demselben Verhältniß wird auch die Endgeschwindigkeit V, welche gleich nv ist, die Anfangsgeschwindigkeit v übertreffen. Lassen wir nun die successiven Einwirkungen, um zu einer stetig veränderten Bewegung zu gelangen, in unwahrnehmbaren Intervallen auf einander folgen, so wird in jeder endlichen Zeit T die dazu gehörige Endgeschwindigkeit V unvergleichlich größer sein, als die Anfangsgeschwindigkeit v; man wird dem zur Folge in der Gleichung (3.) v gegen V zu vernachläßigen berechtigt sein, wo sie dann wird:

$$S = \tfrac{1}{2}\,VT\,, \qquad (5.)$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (4.)

$$S = \tfrac{1}{2}\,T^2\,G\,. \qquad (6.)$$

Die Gleichungen (4) bis (6) enthalten eine geradlinige, stetig in derselben Weise vergrößerte Bewegung in sich, welche durch das Beiwort gleich-

förmig beschleunigte bezeichnet zu werden pflegt. Aus der Gleichung (4.) läßt sich sogleich ersehen, daß G die nach Ablauf der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit ist, sowie aus der Gleichung (6.), daß dieselbe Größe G den doppelten in der ersten Zeit-Einheit zurückgelegten Weg vorstellt.

Eliminirt man die Größe T aus den Gleichungen (4.) und (5.), so gelangt man zu der Gleichung

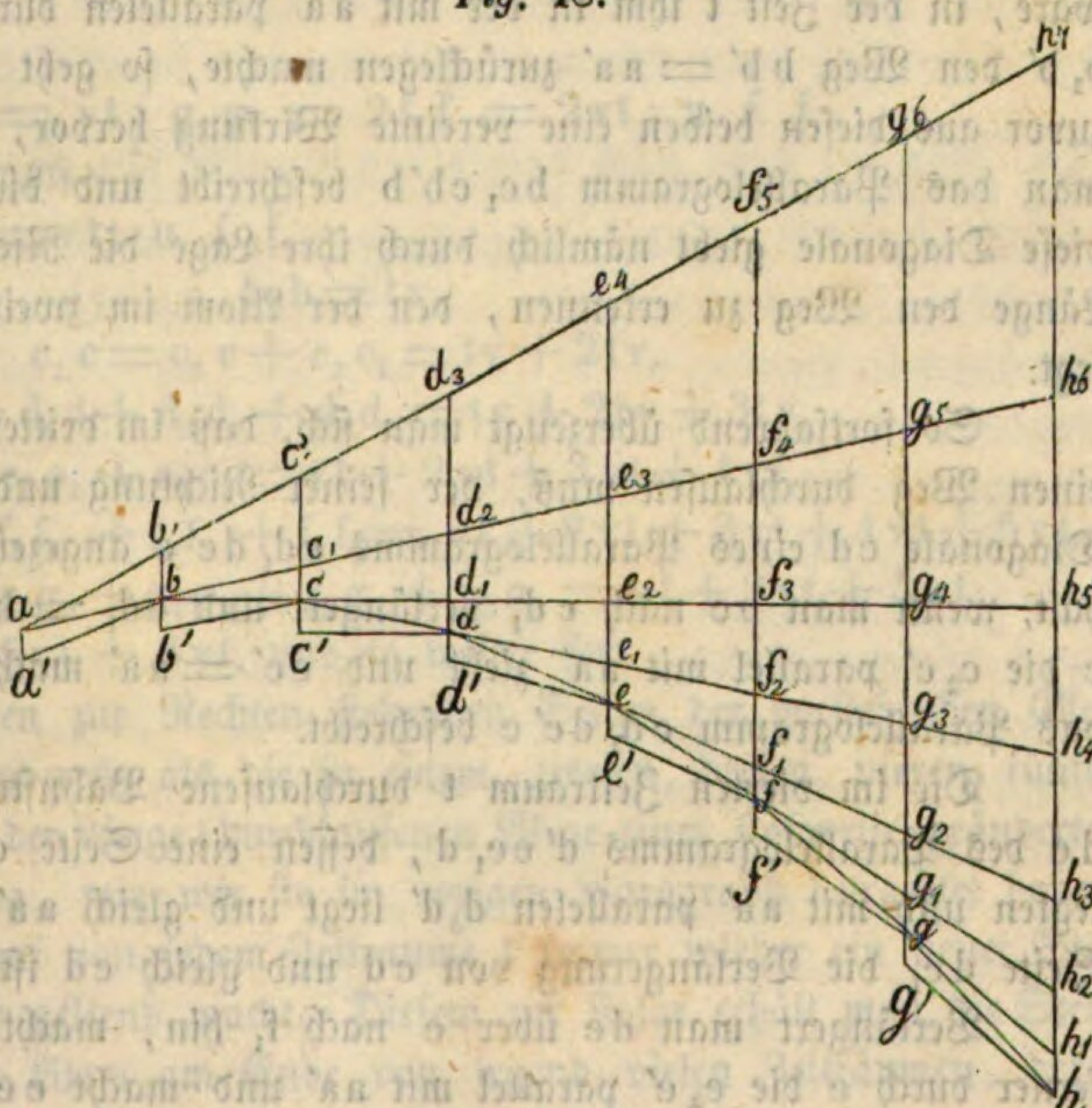
$$V^2 = 2\,SG\,, \qquad (7.)$$

woraus sich die Geschwindigkeit V aus dem durchlaufenen Weg S finden läßt.

§. 17. Von der durch parallele Kräfte zur Seite getriebenen Bewegung.

Beispiel 2. In einem Atom, der sich in unveränderter Bewegung befindet, gesellt sich in einem bestimmten Augenblicke, von dem ab wir die Zeit rechnen wollen, zu der ihn bewegenden Kraft eine neue hinzu, deren Richtung von der der Bewegung verschieden ist, und nach Verlauf eines Zeitraumes von der Dauer t gesellt sich immer wieder eine neue Kraft von gleicher Größe und Richtung wie zuvor zu der vorhandenen Bewegung im Atom hinzu. Welche Beschaffenheit nimmt eine Bewegung dieser Art an?

Fig. 18.



Ist a (Fig. 18.) die Stelle, in welcher sich der Atom anfänglich befindet, u die Geschwindigkeit der noch unveränderten Bewegung in der Richtung ah_7 und v die Geschwindigkeit, welche der Hinzutritt der neuen Kraft in der Richtung aa′ nach jedem Zeitraume im Atom erzeugt, so würde man die Richtung und Geschwindigkeit der aus diesen beiden Kräften hervorgehenden einen Kraft finden, wenn man u und v von der Stelle a aus, die der Atom einnimmt, in ihre Richtungen ah_7 und aa′ einträgt, und über diese beiden Längen ein Parallelo-

gramm beschreibt. Die von a auslaufende Diagonale dieses Parallelogramms gäbe die Richtung und Geschwindigkeit der aus u und v hervorgehenden einen Kraft zu erkennen, welche letztere Geschwindigkeit durch w bezeichnet werden mag. Da sich nun diese Bewegung nur auf die Dauer t unverändert erhält, so legt der Atom während dieser Zeit den Weg tw zurück, den man offenbar seiner Richtung und Länge nach dadurch erhält, daß man von a aus in den Richtungen ab_1 und aa' die Längen tu und tv einträgt, welche durch ab_1 und aa' vorgestellt werden mögen, über $b_1 aa'$ das Parallelogramm $ab_1 ba'a$ beschreibt, und von a aus dessen Diagonale ab zieht; denn es ist dieses Parallelogramm offenbar dem vorigen ähnlich, und da dessen Seiten ab_1 und aa' die mit t multiplicirten homologen Seiten u und v des vorigen sind, so liegt die Diagonale ab in der homologen des vorigen Parallelogramms und ist ebenfalls die mit t multiplicirte Länge w von dieser. Es bezeichnet folglich ab die Richtung und Länge des Wegs, den der Atom im ersten Zeitraume t zurücklegt.

Dieser Atom würde, wenn er sich unverändert fortbewegte, während des zweiten Zeitraums in der Verlängerung bc_1 von ab sich fortbewegen und den Weg $bc_1 = ab$ zurücklegen; weil aber am Anfang dieses Zeitraums, wo sich der Atom in b befindet, eine gleiche und gleichgerichtete Kraft wie in a dessen Bewegung verändernd auf ihn einwirkt, welche, wenn sie allein in ihm thätig wäre, in der Zeit t ihm in der mit aa' parallelen durch b gelegten Richtung $b_1 b'$ den Weg $bb' = aa'$ zurücklegen machte, so geht auf dieselbe Weise wie zuvor aus diesen beiden eine vereinte Wirkung hervor, die man findet, wenn man das Parallelogramm $bc_1 cb'b$ beschreibt und die Diagonale bc zieht; diese Diagonale giebt nämlich durch ihre Lage die Richtung, und durch ihre Länge den Weg zu erkennen, den der Atom im zweiten Zeitraume t zurücklegt.

So fortfahrend überzeugt man sich, daß im dritten Zeitraume t der Atom einen Weg durchlaufen muß, der seiner Richtung und Länge nach durch die Diagonale cd eines Parallelogramms $cd_1 dc'c$ angezeigt wird, das man erhält, wenn man bc nach cd_1 verlängert und $cd_1 = bc$ macht, ferner durch c die $c_2 c'$ parallel mit aa' zieht und $cc' = aa'$ macht, endlich über $d_1 cc'$ das Parallelogramm $cd_1 dc'c$ beschreibt.

Die im vierten Zeitraum t durchlaufene Bahnstrecke ist die Diagonale de des Parallelogramms $d'ee_1 d$, dessen eine Seite dd' in der durch d gelegten und mit aa' parallelen $d_3 d'$ liegt und gleich aa' ist, und dessen andere Seite de_1 die Verlängerung von cd und gleich cd ist.

Verlängert man de über e nach f_1 hin, macht $ef_1 = de$, zieht man ferner durch e die $e_4 e'$ parallel mit aa' und macht $ee' = aa'$, so giebt die Diagonale ef des über $f_1 ee'$ beschriebenen Parallelogramms die Bahnstrecke in dem fünften Zeitraum t zu erkennen.

Verlängert man ef nach g_1 hin, macht $fg_1 = ef$, zieht man durch f die die $f_5 f'$ mit aa' parallel und macht $ff' = aa'$, so giebt die Diagonale fg des über $g_1 ff'$ beschriebenen Parallelogramms die im sechsten Zeitraume t durchlaufene Bahnstrecke zu erkennen u. s. f.

Diese successiven Construktionen der von dem Atom in den auf einander folgenden Zeiträumen von der Länge t durchlaufenen Bahnstrecken bei der hier betrachteten Bewegung führen zu einer vollständigen Erkenntniß dieser Bewegung mittelst der folgenden Betrachtungen:

Erstlich ist

$$bb_1 = aa_1 = tv;\quad c_2c_1 = 2bb_1 = 2tv;\quad d_3d_2 = 3bb_1 = 3tv;$$
$$e_4e_3 = 4bb_1 = 4tv;\quad f_5f_4 = 5bb_1 = 5tv;\quad g_6g_5 = 6bb_1 = 6tv$$

u. s. f.

Zweitens ist

$$c_1c = bb' = tv;\quad d_2d_1 = 2c_1c = 2tv;\quad e_3e_2 = 3c_1c = 3tv;$$
$$f_4f_3 = 4c_1c = 4tv;\quad g_5g_4 = 5c_1c = 5tv \text{ u. s. f.}$$

Drittens ist

$$d_1d = cc' = tv;\quad e_2e_1 = 2d_1d = 2tv;\quad f_3f_2 = 3d_1d = 3tv;$$
$$g_4g_3 = 4d_1d = 4tv; \text{ u. s. f.}$$

Viertens ist

$$e_1e = dd' = vt;\quad f_2f_1 = 2e_1e = 2vt;\quad g_3g_2 = 3e_1e = 3vt;$$

u. s. f.

Fünftens ist

$$f_1f = ee' = vt;\quad g_2g_1 = 2f_1f = 2vt; \text{ u. s. f.}$$

Sechstens hat man

$$g_1g = ff' = vt; \text{ u. s. f.}$$

Demnach ist

$$b_1b = tv,$$
$$c_2c = c_1c + c_2c_1 = tv + 2tv,$$
$$d_3d = d_1d + d_2d_1 + d_3d_2 = tv + 2tv + 3tv,$$
$$e_4e = e_1e + e_2e_1 + e_3e_2 + e_4e_3 = vt + 2vt + 3vt + 4vt,$$
$$f_5f = f_1f + f_2f_1 + f_3f_2 + f_4f_3 + f_5f_4 = vt + 2vt + 3vt + 4vt + 5vt,$$
$$g_6g = g_1g + g_2g_1 + g_3g_2 + g_4g_3 + g_5g_4 + g_6g_5 = vt + 2vt + 3vt + 4vt + 5vt + 6vt, \text{ und so weiter fort.}$$

Die am weitesten zur Rechten stehenden Seiten der vorstehenden Gleichungen sind nichts anderes, als die in einem, zweien, dreien, vieren, fünfen u. s. f. Zeiträumen von der Länge t durchlaufenen Wege einer stoßweise geänderten geradlinigen Bewegung, wie wir sie im vorigen Paragraph betrachtet haben, in welcher nach Verlauf von jedem Zeitraume t immer wieder ein neuer Stoß von der Stärke v sich geltend macht. Diesem zur Folge erhält man die Stelle x, wo der so bewegte Atom am Ende von irgend vielen Zeiträumen, deren Anzahl durch n vorgestellt werden mag, sich befindet, wenn man von a aus, wo der Atom noch vor Eintritt des ersten Stoßes liegt, in der Richtung ah_7

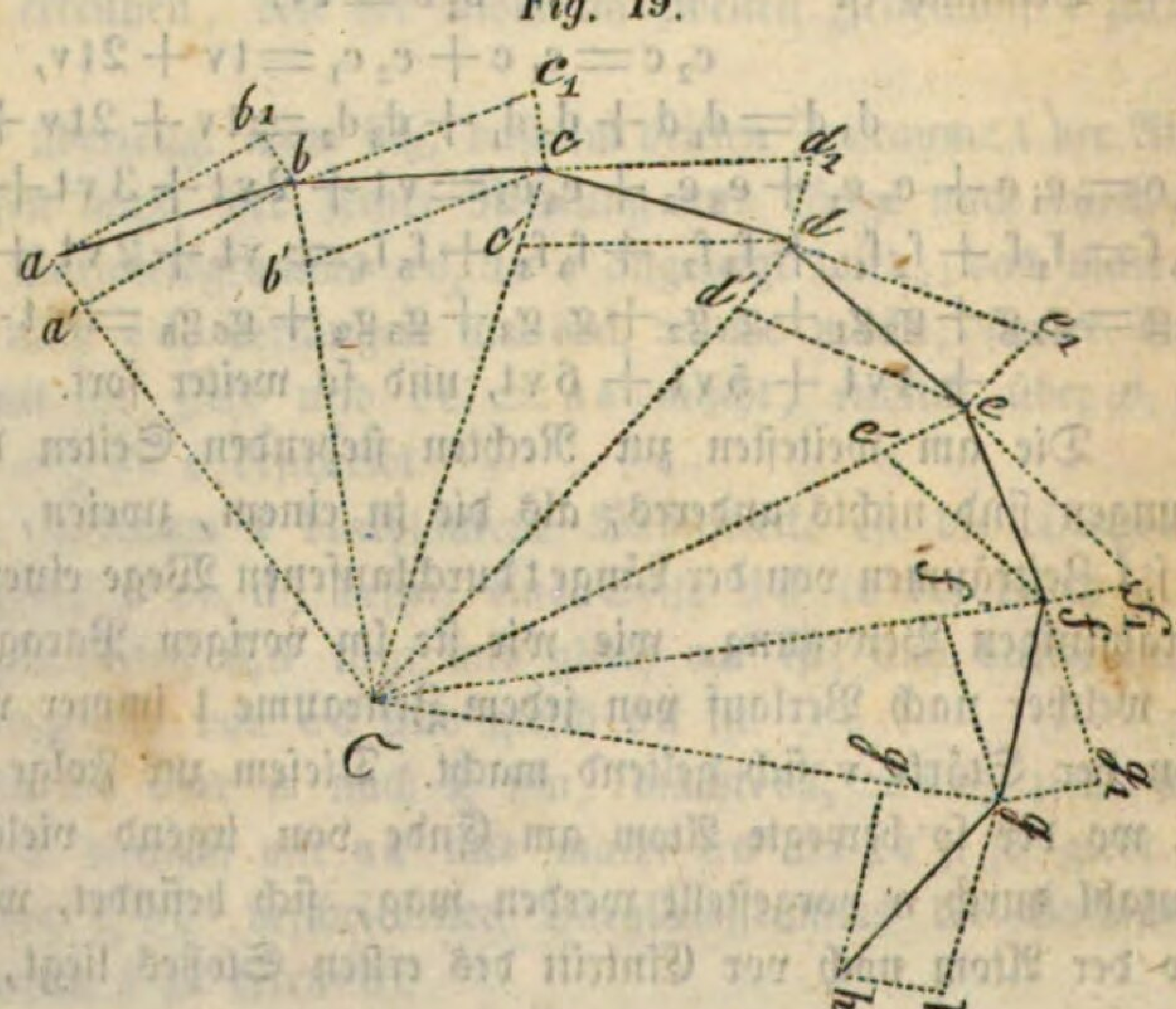
seiner bis hieher unveränderten Bewegung die Länge ab_1 oder tu nmal aufträgt und von dieser letzten Stelle aus in die durch diese Stelle gelegte Richtung der einzelnen Stöße den Weg einträgt, welchen der Atom durchlaufen hätte, wenn dieselben Stöße allein auf ihn eingewirkt und dann eine geradlinige Bewegung zu Stande gebracht hätten.

Wir können diese Bewegung eine durch Stöße, welche in gleichen Zeitabschnitten stets mit gleicher Richtung und Stärke auf den Atom erfolgen, gleichförmig zur Seite getriebene nennen. Denkt man sich die Zeitabschnitte t unendlich klein, zugleich aber auch die nach jedem solchen Zeitabschnitt einwirkenden Kräfte v, und stellt T irgend eine endliche Zeit vor, so ist in dieser t sehr oft enthalten; setzt man also $T = nt$, so muß man sich unter n eine sehr große Zahl vorstellen, dann wird die in der Richtung ah_7 aufgetragene Länge $ntu = Tu$ und die am Ende dieser Länge in der gemeinschaftlichen Richtung aller Stöße aufgetragene Länge wird in diesem Falle, den Betrachtungen des vorigen Paragraphs gemäß gleich $\frac{1}{2} T^2 G$, wenn G den Quotienten $\frac{v}{t}$ bezeichnet, den man sich als eine endliche Größe vorzustellen hat, obgleich seine Bestandtheile v und t unendlich kleine Größen sind. Eine Bewegung von der zuletzt gedachten Art wollen wir eine stetig und gleichförmig zur Seite getriebene nennen. Man überzeugt sich leicht, daß durch eine solche Bewegung die Richtung des Atoms sich der Richtung der Stöße zwar mehr und mehr nähert, ohne sie aber je völlig zu erreichen.

§. 18. Von der stets nach demselben Punkte hin abgelenkten Bewegung.

Beispiel 3. Zum letzten Beispiel mag die Bewegung dienen, welche in gleichen Zeitintervallen durch Kräfte abgeändert wird, deren Richtungen stets durch einen und denselben Punkt hindurch gehen. Diesen Punkt nennt man dann das Centrum der Bewegung, so wie die auf solche Weise hervorgehende Bewegung selber Centralbewegung heißt.

Fig. 19.



Ist a (Fig. 19.) die Stelle des Atoms,

wo wir uns dessen Bewegung zum ersten Male durch eine Kraft verändert vorstellen, deren Richtung durch den festen Punkt C geht, und ist ab_1 die Richtung, u_1 die Geschwindigkeit des Atoms an dieser Stelle, bevor noch die Centralkraft auf ihn eingewirkt hat, so würde derselbe in dem Zeitintervall t den Weg tu_1 zurücklegen; macht man daher $ab_1 = tu_1$, so stellt ab_1 die Bahnstrecke vor, welche der Atom in dem Zeitabschnitt t durchliefe, wenn keine Centralkraft seine Bewegung abänderte; wirkt aber in dem Augenblicke, wo seine Stelle a ist, die Centralkraft in der Richtung aC auf ihn ein, und ist v_1 die Geschwindigkeit, welche sie ihm mittheilt, so ist tv_1 der Weg, den sie allein wirkend dem Atom in dem Zeitabschnitt t zurücklegen macht; sucht man daher in der Richtung aC den Punkt a' auf, welcher $aa' = tv_1$ werden läßt, so liegen ab_1 und aa' in den Richtungen der beiden auf den Atom wirkenden Kräfte und sind den Größen dieser Kräfte u_1 und v_1 proportional; beschreibt man daher über b_1aa' das Parallelogramm $ab_1ba'a$ und zieht dessen Diagonale ab, so liegt diese in der Diagonale des über die in die Richtungen ab_1 und aa' eingetragenen Kräfte u_1 und v_1 beschriebenen Parallelogramms, dessen von a auslaufende Diagonale die Größe und Richtung der aus den Kräften u_1 und v_1 hervorgehenden Mittelkraft, deren Größe u_2 heißen mag, zu erkennen giebt, und es ist, weil beide Parallelogramme einander ähnlich sind, $ab = tu_2$, es stellt also ab die von dem Atom im ersten Zeitabschnitte t durchlaufene Bahnstrecke vor.

Im zweiten Zeitabschnitte t würde ohne neue Veränderung seiner Bewegung der Atom in der verlängerten Richtung ab den Weg $bc_1 = ab$ zurücklegen; weil aber nach Ablauf des ersten Zeitabschnittes t, wo sich der Atom in b befindet, neuerdings eine nach bC gerichtete Kraft, deren Größe wir durch v_2 bezeichnen wollen *), auf ihn einwirkt, vermöge welcher allein er in dem Zeitabschnitt t den Weg tv_2 zurücklegen würde, so erhält man die aus dem Zusammenwirken dieser beiden Kräfte hervorgehende Bahnstrecke in diesem Zeitabschnitte in gleicher Weise wie die vorige, wenn man $bb' = tv_2$ macht und über c_1bb' das Parallelogramm $bc_1cb'b$ beschreibt, dessen Diagonale bc diese Bahnstrecke ihrer Richtung und Länge nach angiebt.

Die dem dritten Zeitabschnitte t angehörige Bahnstrecke findet man durch Verlängerung von bc nach d_1 hin und $cd_1 = bc$ machend, ferner in der Richtung cC die Länge $cc' = tv_3$ nehmend, wo v_3 die Größe der verändernden Kraft an der Stelle c vorstellt, hierauf über d_1cc' das Parallelogramm $cc'dd_1c$ beschreibt und von diesem die Diagonale cd nimmt.

---

*) Wir denken uns v_2 von v_1 verschieden, weil in der Natur die Größe einer auftretenden Centralkraft sich nach dem jedesmaligen Abstand des Atoms von dem Centrum der Bewegung richtet, sonach an verschiedenen Stellen des Atoms verschieden groß sein kann, wozu in unserer Darstellung der Weg offen gelassen ist.

So fortfahrend gelangt man successive zu den Bahnstrecken, welche den aufeinander folgenden Zeitabschnitten von der Länge t entsprechen und (Fig. 19.) im Bilde bis zur 7ten Bahnstrecke dargestellt sind. Schon die vorstehende ganz allgemein gehaltene Beschreibung einer Centralbewegung läßt durchblicken, daß die dabei entstehende Bahn im Allgemeinen rings um das Centrum der Bewegung läuft, wenn man sich den Atom durch die verändernden Kräfte stets nach dem Punkt C hingetrieben denkt, und daß die unsern bisherigen Vorstellungen entsprechende gebrochene Bahn eine krummlinige wird, so wie man die zwischen zwei Stößen liegende Zeit t, zugleich aber auch die aus diesen Stößen hervorgehenden Geschwindigkeiten unendlich klein werden läßt. Die genauere Bestimmung einer solchen stetig krummlinigen Bewegung unter der Voraussetzung, daß der bewegte Atom stets mit einer Kraft nach dem Centrum der Bewegung hingezogen wird, deren Größe in jedem Falle dem Quadrat seines Abstandes von diesem Centrum umgekehrt proportional ist, zeigt, daß eine solche Bahn ein Kegelschnitt wird, in dessen einem Brennpunkt das Centrum der Bewegung liegt, welcher Kegelschnitt bei den Bewegungen der Planeten eine Ellipse ist, und daß in jeder solchen Bewegung alle die Gesetze liegen, welche von Kepler aus den Beobachtungen der Umläufe der Planeten um die Sonne hervorgezogen worden sind. Gerade diese Uebereinstimmung der theoretischen Bewegung mit den in der Wirklichkeit beobachteten ließ Newton, der sie zuerst bemerkte, durch Zergliederung der Hergänge das Gravitationsgesetz auffinden, wonach je zwei und zwei materielle kleinste Theilchen einander gegenseitig anziehen mit einer Kraft, deren Richtung in der Geraden liegt, die jene beiden Theilchen mit einander verbindet, und deren Größe dem Quadrat des Abstandes der beiden Theilchen umgekehrt proportional ist. Unter Annahme dieses einzigen Gesetzes lassen sich alle Bewegungen der Weltkörper im Himmelsraume mit einer bewundernswerthen Vollständigkeit herleiten. So läßt sich schon aus den bisher entwickelten Eigenschaften einer Centralbewegung das zweite Kepler'sche Gesetz ganz leicht erkennen. Faßt man nämlich irgend zwei Sectoren der Fig. 19. in's Auge, z. B. die cCd und dCe, so überzeugt man sich leicht, daß ihr Flächeninhalt der gleiche ist; denn es ist $\triangle\, cCd = \triangle\, dCe_1$, weil sie gleiche Grundlinien und einerlei Höhe haben, ferner ist $\triangle\, dCe_1 = \triangle\, dCe$, weil sie einerlei Grundlinie haben und zwischen Parallelen liegen, und in Folge wird $\triangle\, cCd = \triangle\, dCe$. Hieraus folgt, daß alle in der Veränderungszeit t beschriebenen Sectoren gleichen Inhalt haben, was offenbar noch gilt, wenn auch die verändernde Kraft eine stetig wirkende ist. In diesem Falle aber verhalten sich die von dem Körper durchlaufenen Sectoren, wie die darauf verwendeten Zeiten, und dieß stimmt mit dem zweiten an den Planeten aufgefundenen Kepler'schen Gesetze überein. Die Arbeiten neuerer Physiker haben dargethan, daß auch alle Einwirkungen irdischer Körper auf einander aus der Ferne demselben Gesetze unterthan sind, wobei

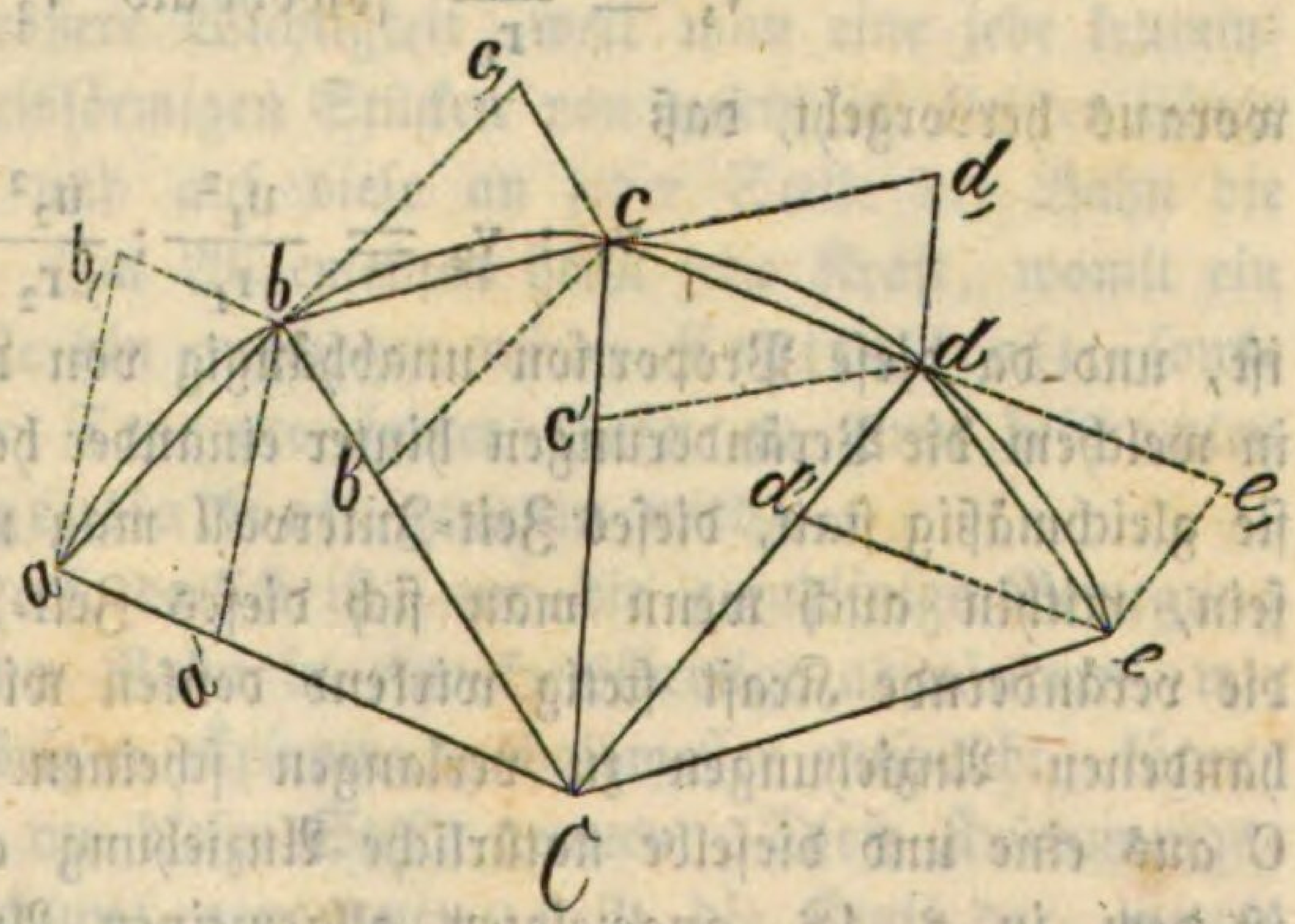
diese Einwirkungen eben sowohl abstoßender wie anziehender Art sein können. Man hat alle diese Bewegungsuntersuchungen einer besondern Wissenschaft der Mechanik übertragen; diese muß aber noch außerdem, da wo Körper auf einander einwirken, von denen jeder unzählig viele Atome in sich enthält, die Kunst verstehen, die Mittelwirkung aus allen diesen von Atom zu Atom eingeleiteten Seitenwirkungen hervor zu suchen, wobei sie allerdings zuweilen in's Stocken geräth, aber immer nur da, wo ihr die Mathematik die erforderliche Hilfe versagt; und größtentheils hieraus erklären sich auch die großen Anstrengungen der Mathematiker, ihr Gebiet zu erweitern und ihre Methoden zu vervollkommnen, Anstrengungen, die von dem, der ihre Veranlassung nicht durchschaut, kaum begriffen, so wie von dem, der deren Tragweite nicht kennt, leicht als kleinliche aufgefaßt werden können.

§. 19. Von der Schwungkraft.

Welche Lage die aufeinander folgenden Veränderungsstellen a, b, c, d, e u. s. w. (Fig. 19.) gegen einander annehmen, das hängt von dem Verhältniß der Größe der im Atom vorhandenen Bewegung, womit er in eine dieser Stellen tritt, zur Größe der hier hinzutretenden verändernden Kraft ab. Wir wollen nun untersuchen, welches Verhältniß zwischen diesen Größen stattfinden muß, wenn alle jene Stellen in der Peripherie eines Kreises liegen sollen, dessen Mittelpunkt die anziehende Stelle C ist.

Wir haben im vorigen Paragraph gesehen, daß bei jeglicher Centralbewegung die auf einander folgenden Dreiecke aCb, bCc, cCd u. s. w. lediglich in Folge der Verbindungsweise zweier Kräfte mit einander einerlei Inhalt annehmen müssen, und dieß zieht nach sich, daß im Falle die Punkte a, b, c... in der Peripherie einer um C beschriebenen Kreislinie liegen sollen, jene Dreiecke sämmtlich einander congruent werden müssen, wie in nebenstehender Figur 20. versinnlicht worden ist, in welcher die Winkel Cab, Cba, Cbc, Ccb u. s. w. sowie die aCb, bCc, cCd.... einander gleich sind; es ist aber, weil bc_1 die Verlängerung von ab ist, $c_1bC = baC + aCb$ und hieraus folgt, daß $c_1bc = aCb = bCc$ ist, und weil der Construktion gemäß $c_1bb'c$ ein Parallelogramm ist, so ist auch $bcb' = c_1bc = bCc$, woraus folgt, daß in unserm jetzigen Falle die Dreiecke bcb' und bCc einander ähnlich werden müssen.

Fig. 20.



Es ist sonach bei der hier betrachteten Bewegung bcb' wie bCc ein gleichschenkliches Dreieck, in welchem $bc = cb'$ wird, und da überdieß $b'c = bc_1$ und $bc_1 = ab$ ist, so hat man hier $bc = ab$, oder mit Worten: Bei der gegenwärtigen Bewegung hat der bewegte Atom überall dieselbe Geschwindigkeit.

Aus den ähnlichen Dreiecken bcb' und bCc folgt weiter, daß $bb' : bc = bc : bC$ ist, und hieraus ergiebt sich, weil den früheren Betrachtungen gemäß $bb' = tv$ ist, wenn v die Geschwindigkeit bezeichnet, welche die nach C gerichtete verändernde Kraft dem Atom in b ertheilt, und $bc = tu$, wenn u die überall gleiche Geschwindigkeit des bewegten Atoms vorstellt, daß

$$tv : tu = tu : r \quad \text{oder} \quad v : u = tu : r$$

ist, wobei r die Größe des Halbmessers von derjenigen Kreislinie anzeigt, in welcher sich die sämmtlichen Veränderungsstellen vorfinden. Aus dieser Proportion aber findet man

$$v = \frac{tu^2}{r}, \qquad \text{(a.)}$$

und diese Gleichung zeigt, daß während der Bewegung in einer solchen Kreislinie, wo r und u unveränderliche Werthe haben, auch v überall den gleichen Werth annimmt, vorausgesetzt, daß die verändernde Kraft in Zeitabschnitten von der constanten Länge t auftritt.

Wir wollen nun annehmen, daß sich zwei Atome in verschiedenen Kreisen um denselben Mittelpunkt C herum bewegen, aus welchen die verändernden Kräfte stets in dem gleichen Zeitintervalle t hervorgehen, so ist, wenn v_1, u_1 und r_1 die besonderen Werthe von v, u und r bei dem einen Atome, v_2, u_2 und r_2 bei dem andern Atome vorstellen, kraft der Gleichung (a):

$$v_1 = \frac{tu_1^2}{r_1} \quad \text{sowohl als} \quad v_2 = \frac{tu_2^2}{r_2},$$

woraus hervorgeht, daß

$$v_1 : v_2 = \frac{u_1^2}{r_1} : \frac{u_2^2}{r_2} \qquad \text{(b.)}$$

ist, und da diese Proportion unabhängig von der Länge t des Zeitabschnitts, in welchem die Veränderungen hinter einander hergehen, geworden ist, so findet sie gleichmäßig statt, dieses Zeit-Intervall mag noch so groß oder noch so klein sein, mithin auch wenn man sich dieses Zeit-Intervall unendlich klein, d. h. die verändernde Kraft stetig wirkend denken will, wie die in der Natur vorhandenen Anziehungen zu verlangen scheinen. Wirkt aber von dem Punkte C aus eine und dieselbe natürliche Anziehung auf die beiden Atome ein, so ist dem in §. 18. angezeigten allgemeinen Anziehungsgesetze gemäß, wenn wieder v_1 und v_2 die durch diese Anziehungen in den beiden Atomen hervorgerufenen Geschwindigkeiten bezeichnen:

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}, \qquad (c.)$$

und diese Proportion giebt in Verbindung mit der (b.)

$$\frac{u_1^2}{r_1} : \frac{u_2^2}{r_2} = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} \text{ oder } u_1^2 : u_2^2 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2}, \quad (d.)$$

d. h. die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit die beiden Atome sich bewegen, verhalten sich umgekehrt wie die Halbmesser der Kreise, in welchen die Bewegungen geschehen.

Nachdem wir eingesehen haben, daß bei der Bewegung in Kreisen die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 allerwärts die gleichen bleiben, ist es leicht, die ganzen Umlaufszeiten T_1 und T_2 der beiden Atome anzugeben. Da nämlich $2 r_1 \pi$ und $2 r_2 \pi$ die Längen der ganzen Bahnen dieser Atome sind, so hat man

$$T_1 = \frac{2 r_1 \pi}{u_1} \text{ und } T_2 = \frac{2 r_2 \pi}{u_2},$$

woraus sich ergibt:

$$u_1^2 = \frac{4 r_1^2 \pi^2}{T_1^2} \text{ und } u_2^2 = \frac{4 r_2^2 \pi^2}{T_2^2};$$

setzt man aber diese Werthe von u_1^2 und u_2^2 in die Proportion (d) ein, so wird diese:

$$\frac{r_1^2}{T_1^2} : \frac{r_2^2}{T_2^2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2},$$

oder

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3, \qquad (e.)$$

d. h. die Quadrate der Umlaufszeiten in zweien kreisförmigen Bahnen verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Halbmesser, worin sich das dritte Kepler'sche Gesetz ausspricht.

Die vorliegenden Gesetze der Kreisbewegung erlangen für die allgemeine Bewegungslehre eine um so größere Wichtigkeit, weil man eine jede krummlinige Bahn als aus lauter kreisförmigen Stücken von unendlich kleiner Länge zusammengesetzt ansehen kann, und auf diese an jeder Stelle der Bahn die obigen Gesetze anwenden darf. Im Allgemeinen heißt jede Kraft, womit ein Atom stets nach derselben Stelle hin angezogen wird: Centralkraft, sowie die, womit er sich längs der Tangente seiner Bahn an einer bestimmten Stelle fortbewegen will, Tangentialkraft genannt wird.

Diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um die geradlinige Bewegung des Atoms an jeder Stelle seiner Bahn in eine kreisförmige abzuändern, wie sie dem zu dieser Stelle gehörigen Krümmungshalbmesser entspricht, könnte man die Krümmungskraft an dieser Stelle nennen. Diese Krümmungskraft mit entgegengesetzter Richtung genommen, stellt die Kraft dar, womit der Atom einer Krümmung seiner Bahn an dieser Stelle Widerstand leistet in der Richtung der zu dieser Stelle gehörigen Normale; sie ist die, welche

man auf den Mittelpunkt der Krümmung an dieser Stelle bezogen, Centrifugalkraft, Fliehkraft oder auch Schwungkraft zu nennen pflegt. Durch das Wort Centripetalkraft bezeichnet man insgemein die Kraft, womit bei jeder Centralbewegung die bewegte Masse nach dem Centrum der Bewegung hingezogen wird; es ist diese im Allgemeinen sehr verschieden von der an jeder Stelle der Bahn wirksamen Krümmungskraft.

Unter den Werkzeugen, welche in eine physikalische Sammlung aufgenommen werden, findet sich in der Regel auch eine, Schwung-Maschine genannte, Vorrichtung, welche die Wirkungen der Centrifugalkraft zu veranschaulichen bestimmt ist. Mit ihrer Hilfe kann man einen Körper in eine rasche Drehung um eine durch sie gegebene Axe versetzen, wobei sich das Bestreben nachgiebiger Stellen wahrnehmen läßt, sich in einer auf dieser Axe senkrechten Richtung von ihr zu entfernen. Sie kann auch zur Versinnlichung des Grundes dienen, weßhalb unsere Erde von der Kugelgestalt abweicht und eine kürzere Ausdehnung längs ihrer Drehaxe als längs ihres Aequators hat, indem jeder nachgiebige Körper der im Ruhestande in der Richtung der Dreh-axe der Schwungmaschine länger ist, als in der darauf senkrechten, umgekehrt länger in dieser Richtung als in jener wird, so wie er mittelst der Schwungmaschine in eine rasche Drehung um ihre Axe versetzt wird.

§. 20. Von der Bewegung eines festen Körpers.

Es gehört noch zu unserer Aufgabe, die Grundzüge von der Art und Weise zu entwerfen, wie die Bewegung eines festen Körpers bestimmt werden kann. Hierzu werden uns die (in Kapitel II.) aufgefundenen statischen Sätze, die wir in den §§. 13. und 14. aufgestellt haben, den Weg bahnen.

Wenn ein fester Körper sich so bewegt, daß alle seine Atome in parallelen und gleichläufigen Richtungen mit einerlei Geschwindigkeit fortschreiten, so nennen wir diese besondere Bewegungsweise des festen Körpers seine fortschreitende Bewegung. Es leuchtet von selber ein, daß durch diese Art der Bewegung die Atome keinen Anlaß erhalten auf einander einzuwirken, und dadurch die Molecularkräfte des festen Körpers ins Spiel zu bringen, so daß man sich eine solche Bewegung der Atome selbst da denken kann, wo zwischen diesen gar kein Zusammenhang unter einander statt findet. Diese die Festigkeit des Körpers gar nicht in Anspruch nehmende Bewegungsweise wollen wir nun vor Allem näher kennen zu lernen suchen. Bezeichnen wir die Massen der einzelnen, den so bewegten festen Körper ausmachenden Atome durch μ_1, μ_2, μ_3.... und die allen gemeinsame Geschwindigkeit mit γ, so sind, nach dem was in §. 15. gesagt worden ist, $\mu_1 \gamma$, $\mu_2 \gamma$, $\mu_3 \gamma$.... die Kräfte, womit diese Atome in parallelen und gleichläufigen Richtungen vorwärts getrieben werden. Man kann nun im festen Körper die Größe und Richtung einer einzigen Kraft und zugleich die Stelle angeben, wo diese wirken müßte, um

auf den festen Körper völlig die gleiche Wirkung wie jene vielen auszuüben, nach Anleitung des in §. 14. entwickelten allgemeinen Satzes; nur sind hier die Kräfte $\mu_1\gamma$, $\mu_2\gamma$, $\mu_3\gamma$.... das, was dort durch P_1, P_2, P_3.... bezeichnet worden ist. Setzt man in die dortigen Gleichungen (a), (b), (c) für P_1, P_2, P_3.... die Werthe, welche diesen Kräften in unserm jetzigen Falle zukommen, so werden sie:

$$a_1 b'. \mu_1 \gamma = a_2 b'. \mu_2 \gamma, \quad b' b'' (\mu_1 + \mu_2) \gamma = a_3 b''. \mu_3 \gamma,$$
$$b'' b'''. (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \gamma = a_4 b'''. \mu_4 \gamma, \text{ u. s. f.}$$

und diesen kann man sogleich die andere Form geben:

$$a_1 b'. \mu_1 = a_2 b'. \mu_2, \quad b' b'' (\mu_1 + \mu_2) = a_3 b''. \mu_3,$$
$$b'' b''' (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = a_4 b'''. \mu_4, \text{ u. s. f.}$$

Diesen letzteren Gleichungen gemäß bestimmen sich die Punkte b', b'', b'''.... lediglich aus den Massen μ_1, μ_2, μ_3.... der im festen Körper befindlichen Atome und deren Stellung zu einander, und die letzte Stelle, auf die man so geführt wird, ist die, an welcher eine Kraft von der Größe

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots.) \gamma$$

angebracht, deren Richtung die Richtung der Bewegung ist, völlig die gleiche Wirkung auf den festen Körper ausübt, wie wenn die partiellen Kräfte $\mu_1\gamma$, $\mu_2\gamma$, $\mu_3\gamma$.... in den einzelnen Atomen thätig sind. Da nun diese letzte Stelle lediglich von der Vertheilung sämmtlicher Massen im festen Körper abhängig ist, so wollen wir sie den Mittelpunkt der Masse nennen. Umgekehrt, wenn der Mittelpunkt der Masse eines festen Körpers durch eine Kraft K angetrieben wird, so bringt diese die gleiche Wirkung hervor, wie wenn dessen einzelne Atome in der Richtung der Kraft K mit einer und derselben Geschwindigkeit γ sich fortbewegen, falls γ so bestimmt wird, daß

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots.) \gamma = K \text{ ist.}$$

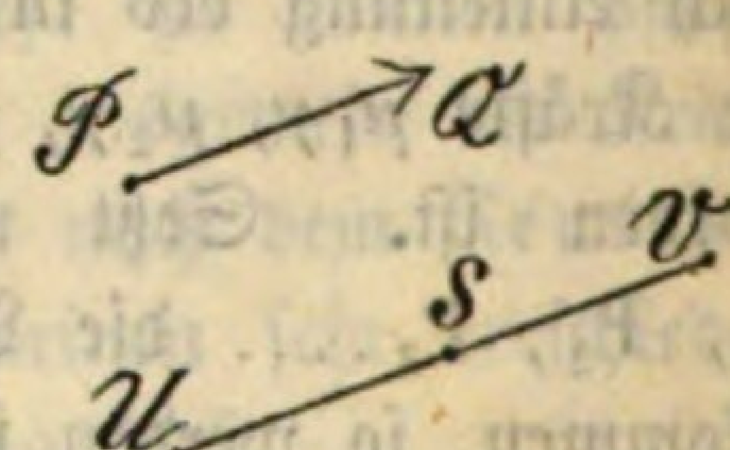
Nennt man die Summe der Massen von allen in dem festen Körper befindlichen Atomen die Masse dieses Körpers und bezeichnet sie durch M, so wird die vorstehende Gleichung

$$M\gamma = K \text{ und giebt } \gamma = \frac{K}{M};$$

man findet also die Geschwindigkeit der blos fortschreitenden Bewegung, in die ein fester Körper durch eine Kraft K, welche auf dessen Mittelpunkt der Masse einwirkt, geräth, wenn man mit dessen Masse M in diese Kraft K dividirt. Hat eine Kraft K, wodurch ein fester Körper zur Bewegung angetrieben wird, ihren Sitz nicht in dessen Mittelpunkt der Masse, so bestimmt sie ihn nicht blos zu einer rein fortschreitenden Bewegung, sondern zugleich auch zu einer drehenden, wie man aus der folgenden höchst einfachen Betrachtung abnehmen kann.

Stellt nämlich S (Fig. 21.) den Mittelpunkt der Masse von irgend einem festen Körper vor, und wird dieser Körper durch eine Kraft zur Bewegung angetrieben, die ihren Sitz in der Stelle P hat, und deren Richtung und Größe durch die Länge PQ angezeigt wird, so ist es dem Satze der gleichen Wirkung zur Folge gestattet, ohne eine Aenderung im Zustande des Körpers befürchten zu müssen, an der Stelle S zwei neue Kräfte SU und SV sich wirksam zu denken, deren Richtungen mit PQ parallel aber gegenläufig sind, und welche beide dieselbe Größe, wie die in P wirkende haben, weil diese beiden letzten Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

Fig. 21.



Von den drei jetzt im festen Körper vorhandenen Kräften bilden aber die zwei PQ und SU einen Drehzwilling, der den festen Körper zu einer blosen Drehung auffordert, während die Kraft SV denselben Körper in eine rein fortschreitende Bewegung längs der Richtung SV, dem kurz vorher Gesagten gemäß, versetzt, woraus folgt, daß eine den festen Körper an der Stelle P, welche außerhalb des Mittelpunktes seiner Masse S liegt, zur Bewegung antreibende Kraft nur dann eine rein fortschreitende Bewegung in ihm hervorruft, wenn deren Richtung durch diesen Mittelpunkt hindurch läuft, in welchem Falle allein er zur Fortschreitung ohne alle drehende Bewegung bestimmt wird.

Nach der hier gewonnenen Einsicht ist es nun leicht, den Gang im Allgemeinen zu bezeichnen, welcher bei der Bestimmung der Bewegung eines festen Körpers eingehalten werden muß. Denken wir uns nemlich einen frei beweglichen festen Körper A, der von einem oder mehreren andern festen Körpern B, C, u. s. w. zur Bewegung angetrieben wird, welche letztern selber wir uns der größern Einfachheit unserer Betrachtungen halber unbeweglich vorstellen wollen, so wird jeder Atom des Körpers A durch sämmtliche Atome des Körpers B zur Bewegung angereizt, wodurch in jedem der in Betrachtung gezogenen Atome des Körpers A so viele Kräfte erzeugt werden, als Atome in dem Körper B vorhanden sind, welche Kräfte sämmtlich als völlig bekannte anzusehen sind; denn sie haben alle ihren Angriffspunkt in dem eben zur Untersuchung genommenen Atom des Körpers A, ihre Richtungen liegen in den Geraden, welche von diesem Atom nach allen Atomen des Körpers B hingezogen werden, sind also mit der relativen Lage der Körper A und B zugleich gegeben, und streben nach dem Körper B hin oder von ihm ab, je nachdem die zwischen den beiden Atomen thätige Kraft eine anziehende oder abstoßende ist, und ihre Größen hängen vermöge des in der Natur allgemein wahrgenommenen Wirkungsgesetzes in bestimmter Weise von den mit der Stellung der beiden Körper gegen einander gegebenen Abständen der beiden Atome, und von deren Massen ab, welche die Rechnung aus der bekannten

Dichtigkeit der Körper an ihren verschiedenen Stellen herzuleiten versteht. Sind neben dem Körper B noch andere C, D ... vorhanden, welche den A zur Bewegung anreizen, so gilt von jedem dieser ganz dasselbe, was so eben von dem B gesagt worden ist. So lernt man alle die Kräfte kennen, welche in den einzelnen Atomen des Körpers A wirksam sind, wobei sich alle die, welche in einem und demselben Atome thätig sind, durch eine einzige Mittelkraft ersetzen lassen, so daß man schließlich so viele Kräfte findet, als Atome im Körper A vorhanden sind, von denen jede ihren Atom in Bewegung setzen will. Nachdem dieses geschehen ist, denkt man sich alle diese Kräfte in ihrer Größe und Richtung im Mittelpunkte der Masse des Körpers A wirksam, zugleich aber auch alle die diesen an Größe gleichen, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzten. Erstere bewirken im festen Körper eine rein fortschreitende Bewegung, letztere liefern in Verbindung mit den ursprünglichen Kräften Drehzwillinge, die sich sämmtlich zu einem einzigen vereinigen lassen. Die auf diese Weise für einen bestimmten Moment aufgefundenen einfachen Elementarwirkungen müssen dann noch auf die Dauer der Bewegung successive unter sich vereinigt werden, wenn man den Zustand der Bewegung des festen Körpers zu jeder Zeit vollständig erkennen will. Die hier beschriebenen einzelnen zur Bestimmung der Bewegung eines festen Körpers erforderlichen Verrichtungen wären freilich unausführbar da, wo die Anzahl und Stellung der Atome in den Körpern uns unbekannt bleibt, und wo die Einwirkung der Kräfte stetig fort geschieht, hätten wir nicht in der Integral-Rechnung das Mittel gefunden, alle diese in jede einzelne solche Verrichtung eingehenden unendlich vielen Operationen mit einem einzigen Schlage abzumachen.

§. 21. Vom Stoße fester Körper.

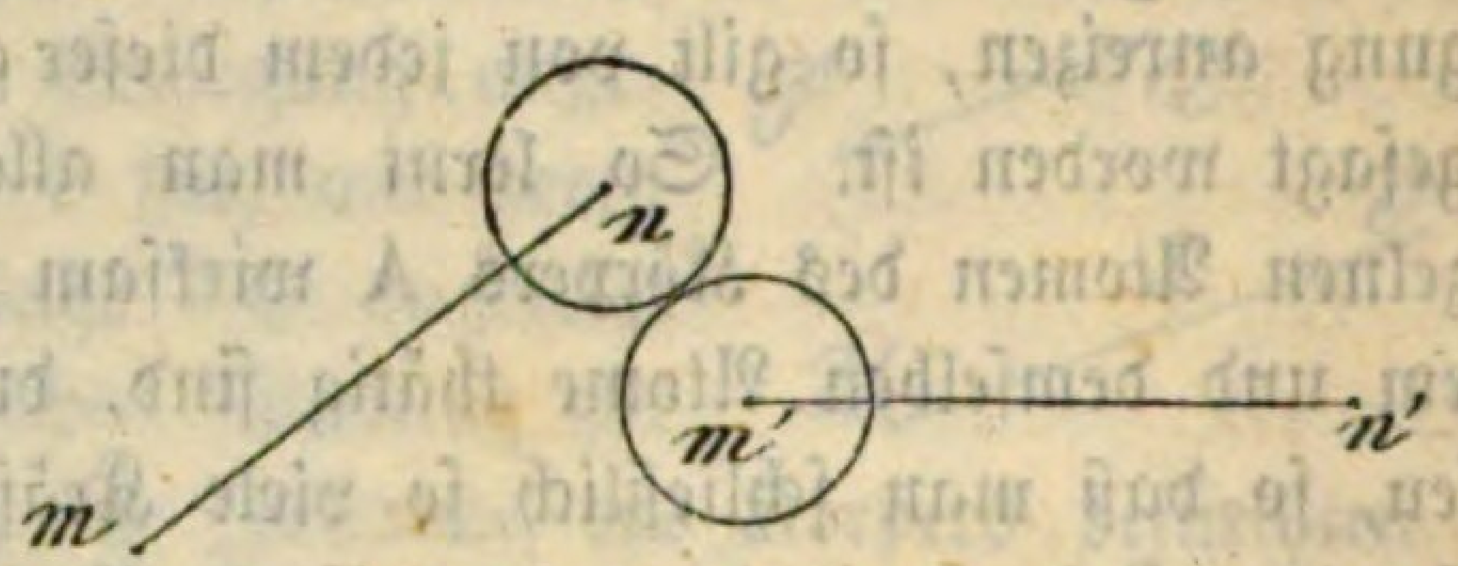
Wenn ein bewegter fester Körper einem andern bewegten oder nicht bewegten begegnet in solcher Weise, daß wenn jeder seinen Zustand ungeändert fort behaupten wollte, beide einander ganz oder theilweise durchdringen müßten, so zwingt sie die allgemeine Eigenschaft der Körper, undurchdringlich zu sein, zu einem Austausch ihrer Kräfte auf so lange, bis jeder von den beiden Körpern den Zustand, welchen die in ihm übrig bleibenden Kräfte bedingen, ungehindert einnehmen kann. Bewegen sich die beiden Körper rein fortschreitend, so darf man dem §. 20. gemäß deren Kräfte im Mittelpunkt ihrer Masse vereinigt sich vorstellen; haben daher beide die Kugelform und sind die Massen in ihnen völlig gleichförmig vertheilt, so fällt ihr Mittelpunkt der der Form mit ihrem Mittelpunkt der Masse zusammen, und bewegen sich beide so, daß deren Mittelpunkte eine und dieselbe ge-

Fig. 22. a.



rade Linie durchlaufen, so haben sie im Augenblick der Berührung die in Fig. 22. a. angedeutete Lage, wobei deren Richtungen in der durch beide Mittelpunkte hindurchgehenden Geraden m n liegen. In diesem Falle, was man den centralen Stoß nennt, ist keiner von den beiden Kugeln irgend ein Anlaß zu einer Ausweichung nach einer Seite hin gegeben. Bewegen sich hingegen die beiden Kugeln in Richtungen, die nicht in einer und derselben Geraden liegen, so können sie nur in der Fig. 22. b. abgebildeten Art in Berührung mit einander kommen, wobei m n und m' n' die Geraden vorstellen, in denen die Richtungen liegen, worin sich deren Mittelpunkte bewegen. In diesem Falle, was man den excentrischen Stoß zu nennen pflegt, ist wenigstens einer von den beiden Kugeln, was auch die Lage der Geraden m n und m' n' gegeneinander sein mag, falls nur beide nicht in einer und derselben Geraden wie in Fig. 22. a. liegen, Gelegenheit zu einer Ausweichung nach der Seite gegeben. Da sich indessen der excentrische Stoß mittelst der bisherigen Sätze immer leicht auf den centralen zurückführen läßt, so wird dieser hier der Kürze halber allein betrachtet werden.

Fig. 22. b.



Fassen wir die in Fig. 22. a. abgebildete centrale Bewegung in's Auge, wobei man sich die beiden Kugeln auch von ungleicher Größe vorstellen darf, so ist von selbst klar, daß man sich von dem Augenblicke an, wo dieselben zur Berührung kommen, bis zu dem Augenblicke, wo sich dieselben wieder von einander entfernen wollen, als einen einzigen festen Körper vorstellen darf, indem keine der andern auszuweichen im Stande ist. Auf diesen einen festen Körper sind zwei Kräfte wirksam, die, womit sich die eine Kugel, und die, womit sich die andere Kugel zu bewegen strebt. Nennen wir die Masse der einen Kugel m_1 und ihre Geschwindigkeit v_1, so ist die Größe der in ihr befindlichen Kraft $m_1 v_1$; eben so ist die Größe der in der andern Kugel befindlichen Kraft $m_2 v_2$, wenn m_2 deren Masse und v_2 deren Geschwindigkeit vorstellt. Nehmen wir nun an, daß sich beide Kugeln vor ihrer Berührung nach derselben Seite hin in der Geraden m n fortbewegen, wo dann die vordere Kugel eine kleinere Geschwindigkeit haben muß, als die hintere, weil es außerdem zu keiner Berührung d. h. zu keinem Stoße käme, so wirken auf den einen festen Körper, den die beiden Kugeln in Berührung mit einander bilden, die beiden Kräfte, deren Größen $m_1 v_1$ und $m_2 v_2$ sind, die in derselben Geraden nach der gleichen Seite hin streben; sie summiren sich daher zu einer einzigen von der Größe $m_1 v_1 + m_2 v_2$, deren Richtung in derselben Geraden liegt, und nach derselben Seite hinstrebt, und die durch den Mittelpunkt der Masse des einen, von beiden Kugeln gebildeten festen Körpers

geht, indem dieser nothwendig in der Geraden m n liegt, welche die Mittelpunkte der beiden Kugeln verbindet. Diese Kraft wird daher gemäß des im vorigen Paragraph Gesagten die vereinten beiden Kugeln zu einer rein fortschreitenden Bewegung antreiben, deren Geschwindigkeit, wenn wir sie durch v bezeichnen, durch die Gleichung

$$(m_1 + m_2)\, v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

gegeben ist. Bis dieses Ziel erreicht ist, was freilich meistens in kaum bemerkbarer Zeit geschieht, findet ein allmäliger Uebergang der Kräfte aus der einen Kugel in die andere statt, wobei die eine Kugel an Kraft gewinnt, die andere verliert. Um den Gewinn oder Verlust hiebei zu ermitteln, darf man nur bedenken, daß die Masse m_1 nach erfolgter gleichheitlicher Bewegung die Kraft $m_1 v$ besitzt, und vor der Berührung die Kraft $m_1 v_1$ in sich trug, also hat sie an Kraft gewonnen

$$m_1 (v - v_1)\ ,$$

und ein negativer Werth dieses Produkts giebt einen Verlust an Kraft zu erkennen. Auf gleiche Weise erhält man den Gewinn an Kraft in Bezug auf die Masse m_2 gleich

$$m_2 (v - v_2).$$

Aus der diesen Ausdrücken vorangegangenen Gleichung findet man:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\ ,$$

und hieraus:

$$v - v_1 = \frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad v - v_2 = \frac{m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}\ ,$$

so daß man erhält:

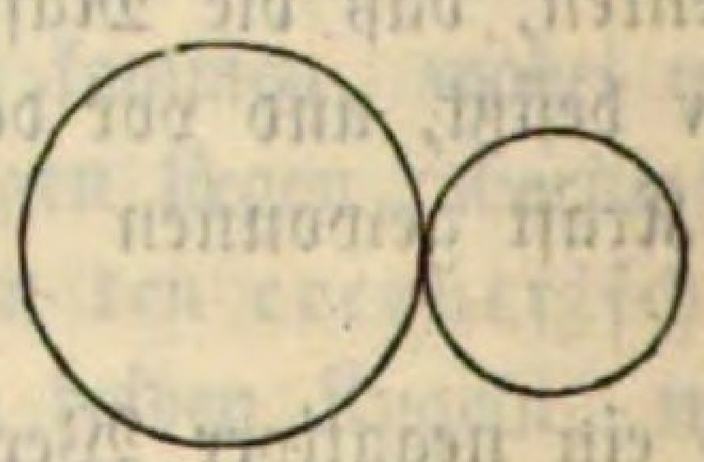
$$m_1 (v - v_1) = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \text{ und } m_2 (v - v_2) = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Hieraus sieht man, daß Gewinn und Verlust an Kraft gleich groß ist, und daß Gewinn an Kraft bei der Masse stattfindet, welche die kleinere Geschwindigkeit hat, welches wir bei der Masse m_1 annehmen wollen, während daß Verlust an Kraft bei der mit der größeren Geschwindigkeit versehenen Masse m_2 eintritt.

Während des Uebergangs der Kraft aus einer Kugel in die andere findet zwischen beiden fortwährend Druck und Gegendruck an der Berührungsstelle statt, wodurch eine Gestaltsveränderung der beiden Kugeln herbeigeführt wird, die sich durch eine Abplattung der Berührungsstelle zu erkennen giebt. Der weitere Verlauf des Stoßes hängt nun ganz und gar von der besondern Natur der beiden auf einander einwirkenden Kugeln ab. Sind diese gänzlich unelastisch, so daß die Abplattung durchaus keine Neigung hat, ihre frühere Gestalt wieder herzustellen, so bewegen sich beide Kugeln nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit v, welche wir eben gefunden haben, in ihrer veränderten Gestalt weiter fort. Sind aber beide Kugeln in höchstem Grade elastisch, so

streben beide ihre Gestalt mit derselben Kraft wieder herzustellen, mit welcher sie verändert worden ist, welche Kraft bei der vordern Kugel als Gewinn von der Größe $m_1 (v - v_1)$, bei der hintern Kugel als Verlust von der Größe $- m_2 (v - v_2)$ gefunden worden ist, wobei sich auch gezeigt hat, daß beide Größen einander gleich sind. Der Gewinn an Kraft in der vordern Kugel von der Größe $m_1 (v - v_1)$ zieht dann in ihr einen Gewinn an Geschwindigkeit von der Größe $v - v_1$ nach sich, so wie der Verlust an Kraft in der hintern Kugel von der Größe $- m_2 (v - v_2)$ einen Verlust an Geschwindigkeit in ihr von der Größe $v_2 - v$ zur Folge hat.

Fig. 22. c.



In Folge der Gestaltswiederherstellung in den beiden vollkommen elastisch vorausgesetzten Kugeln gewinnt die vordere und verliert die hintere noch einmal die gleiche Kraft wie während des Stoßes vor der Gestaltswiederherstellung, und dieß zieht eine doppelt so große Aenderung in der Geschwindigkeit einer jeden Kugel nach sich, als die eben angegebene war. Nach der Gestaltswiederherstellung hat demnach die vordere Kugel den Gewinn $2 (v - v_1)$, die hintere Kugel den Verlust $2 (v_2 - v)$ an Geschwindigkeit gemacht; bezeichnen daher $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 nach der Gestaltswiederherstellung, so ist:

$$\mathfrak{v}_1 = v_1 + 2 (v - v_1)$$

und

$$\mathfrak{v}_2 = v_2 - 2 (v_2 - v) \, ,$$

oder

$$\mathfrak{v}_1 = 2 v - v_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_2 = 2 v - v_2 \, .$$

Die beiden $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ gebenden Gleichungen enthalten alle Eigenschaften des centralen Stoßes von vollkommen elastischen Kugeln in sich. Je nach dem Grade der Elastizität der beim Stoße vorkommenden Körper können sie ihre verloren gegangenen Gestalten mit der ganzen Kraft, womit die Gestalt verändert worden ist, wiederherstellen, oder auch mit jeder geringern bis zur Null hin. Kennt man den aliquoten Theil von der formverändernden Kraft, womit die Gestaltswiederherstellung erfolgt, so läßt sich das Endergebniß des Stoßes auf analoge Weise bestimmen wie oben. Bewegen sich die beiden Kugeln vor dem Stoße gegen einander, so können auch hiefür die obigen Formeln dienen; nur muß man die Geschwindigkeit der Kugel, welche mit der kleinern Kraft sich fortbewegt, als negative Größe in sie einführen, sowie man diejenige Geschwindigkeit, welche aus vorstehenden Formeln als eine negative hervorgeht, einer entgegengesetzten Richtung entsprechend anzusehen hat.*)

*) Ausführliches über die Bewegung fester Körper findet man in den Schriften gründlicher Mechaniker, z. B. in Poison's Traité de Mécanique.

Es ist in Vorstehendem vorausgesetzt worden, daß die sich stoßenden Kugeln eine rein fortschreitende Bewegung haben. Wo zugleich mit der fortschreitenden eine drehende Bewegung vorhanden ist, erleiden die Erscheinungen oft sehr auffallende Modifikationen, die man insbesondere beim Billardspiele zu beobachten Gelegenheit hat, wo es in der Gewalt des Spielers steht, seinem eigenen Balle durch die Art, wie er ihn trifft, die verschiedenartigsten Drehungen mitzutheilen.

Kapitel IV.

Von dem Zusammenwirken der Kräfte in flüssigen Körpern.

---

§. 22. Princip für ruhende Flüssigkeiten.

Die Behandlung flüssiger Körper in Bezug auf das Spiel der in ihnen thätigen Kräfte unterliegt viel größeren Schwierigkeiten als die der festen Körper, insbesondere deßhalb, weil die Theile einer Flüssigkeit sehr verschiedene Stellungen zu einander annehmen können in Folge der auf sie wirkenden Kräfte, und eine vollständige Einsicht in die Hergänge bei Flüssigkeiten diese Lagenveränderungen, welche sogar bei einem ruhigen Verharren der Flüssigkeiten an ihrem Orte als Massen betrachtet, statt haben können, in sich aufnehmen müßte, was aber in den allermeisten Fällen die Kräfte unserer heutigen Mechanik übersteigt. Es haben zwar mehrere der ausgezeichnetsten Mechaniker wie Lagrange, Laplace, Poisson, Cauchy, die Wellenbewegungen im Wasser und in der Luft untersucht, aber nur unter solchen Beschränkungen, daß ihre Resultate keine allgemeine Anwendbarkeit gestatten. Es ist jedoch schon durch die Bemühungen der älteren Physiker ein Princip an's Licht gezogen worden, welches wahr bleibt, was auch die gegenseitige Lage der Flüssigkeitstheile sein mag, so lange sie nur ein continuirliches Ganze bilden, und das in sehr vielen Fällen Auskunft giebt über das Verhalten von Flüssigkeiten als Massen betrachtet, deren Theile unter sich zusammen hängen. Dieses Princip lautet so: Ein auf Flüssigkeitstheilchen in gegebener Richtung ausgeübter Druck von bestimmter Stärke trägt sich auf jedes andere Theilchen derselben Flüssigkeitsmasse mit unveränderter Stärke und zwar nach allen denkbaren Richtungen über in jeglichem zusammenhängenden Zustande der Flüssigkeit; man kann es das Princip der gleichen Fortpflanzung eines Druckes nach allen Richtungen nennen. Es findet sowohl in wasserförmigen wie in

luftförmigen Flüssigkeiten statt, jedoch ist dasselbe bei beiden von sehr veränderten äußern Erscheinungen begleitet.

Die wasserförmigen Flüssigkeiten ziehen sich durch einen vermehrten äußern Druck zwar in einen kleinern Raum zusammen, jedoch ist diese Raumveränderung so unbedeutend, daß sie nur durch die allerschärfsten Messungen entdeckt, und daher im Allgemeinen als gar nicht vorhanden angesehen werden kann. Anders aber verhält sich die Sache bei den luftförmigen Flüssigkeiten. Diese ziehen sich bei vermehrtem äußern Druck in einen sehr merklich kleinern Raum zusammen, nach einem Gesetze, das für alle luftförmigen Flüssigkeiten das gleiche bleibt und nach dem Namen seines Entdeckers das Mariotte'sche genannt wird. Es heißt so: Die Räume, welche ein beliebiges Quantum Luft unter verschiedenen äußern Drucken einnimmt, sind diesen Drucken umgekehrt proportional. Mariotte erwies dieses Gesetz mit Hilfe einer heberförmig gebogenen Barometerröhre, deren kurzer Schenkel zugeschmolzen und sorgfältig calibrirt war, und längs dessen längerem Schenkel gleiche Theile, am besten Vielfache von den Theilen des kurzen Schenkels aufgetragen waren. Er ließ nun die Luft im kurzen Schenkel durch Quecksilber im langen Schenkel von verschiedenen Höhen zusammendrücken, und leitete aus dem, was er dabei wahrnahm, das obige Gesetz in aller Strenge ab; hiebei konnte er die Drucke nicht größer werden lassen, als die Höhe des längeren Schenkels zuließ; in neueren Zeiten aber, wo der Gebrauch dieses Gesetzes zur Bestimmung der durch Dampfmaschinen erzeugten Kräfte eine besondere Wichtigkeit erhielt, wurden ähnliche Versuche mit großen Kosten von der französischen Akademie weiter fortgesetzt mittelst eines aus Theilen zusammengesetzten längeren Schenkels, der innerhalb eines Thurmes in die Höhe geführt wurde. Mittelst dieses colossalen Apparates, der Drucke zuließ, die den unserer Atmosphäre 27mal übertrafen, fanden die mit den Versuchen beauftragten Akademiker Arago und Dulong, daß das Mariotte'sche Gesetz sich in aller Strenge vom einfachen bis zum 27fachen Atmosphärendruck bewähre.

Fig. 23.



Man hat sich auch noch überdieß von der vollkommenen Anwendbarkeit des Mariotte'schen Gesetzes in den Fällen überzeugt, wo der auf das Quantum Luft ausgeübte Druck kleiner als ein Atmosphärendruck ist. Zu diesem Zwecke nimmt man (Fig. 23.) eine weitere unten verschlossene Röhre M, an welche oben ein trichterförmiger Ansatz N angeschmolzen worden ist, und eine gewöhnlich am Ende zugeschmolzene Barometerröhre B, welche sich in die Röhre M einsenken läßt; beide ohngefähr von solcher Länge, wie die Höhe der Quecksilbersäule im Barometer ist, lieber noch

etwas länger. Man füllt die Röhre M mit Quecksilber bis in den Trichter hinein, jedoch nicht höher, als daß kein Quecksilber ausläuft, wenn auch die Röhre B so tief als möglich in die Röhre M eingesenkt wird. Hierauf füllt man die Röhre B mit Quecksilber bis auf eine kurze Strecke, verschließt sie mit dem Finger, bringt sie umgekehrt in das Quecksilber und zieht den Finger weg, nachdem ihr offenes Ende unter dem Quecksilber sich befindet. Man kann dann die Röhre B so weit in die M einsenken, daß die Oberfläche des Quecksilbers in der Röhre B mit der im Trichter N gleich hoch steht, dann giebt die calibrirte Röhre den Raum der Luft unter einem Atmosphärendruck an. Zieht man die Röhre B aus der M heraus bis das Quecksilberniveau in der Röhre einen beliebigen lothrechten Abstand von dem im Trichter N annimmt, so ist der Druck auf die Luft um so viel geringer geworden, und die calibrirte Röhre zeigt den Raum an, den die Luft bei diesem verringerten Drucke einnimmt, wobei man findet, daß auch hier wieder die Räume den Drucken umgekehrt proportional sind.

Bei allen diesen Versuchen wird die Größe des Druckes immer aus dem lothrechten Abstand der beiden Quecksilberoberflächen von einander entnommen in der Weise, wie es die Eigenschaften schwerer Flüssigkeiten, von welchen in Kurzem die Rede sein wird, verlangen. Man darf das Mariotte'sche Gesetz als eines der durch Versuche am vollständigsten bewährten ansehen. Es gilt bei allen trockenen luftförmigen Flüssigkeiten ohne Zweifel bis nahe an die Grenze, wo der Druck groß genug wird, um sie aus ihrem luftförmigen Zustande in den wasserförmigen überführen zu können.

Die bisher beschriebenen Eigenschaften der Flüssigkeiten gehen solche an, die fortwährend denselben Ort einnehmen, oder denen wenigstens nach erlittener Raumveränderung wieder ein völlig bestimmter Raum angewiesen ist. Noch schwieriger ist es, die Zustandsänderungen solcher Flüssigkeiten genau anzugeben, welche in fortwährender Bewegung sind, und hier haben es die vereinten Bemühungen der ausgezeichnetsten Hydrauliker noch nicht weiter bringen können, als zur Behandlung von einzelnen Hergängen und noch dazu diese unter sehr beträchtlichen Beschränkungen. Diese Beschränkungen, verbunden mit dem großen Rechnungsaufwande, der zur Darstellung jener Hergänge erforderlich ist, sind die Ursache, warum die Physiker bis jetzt nur noch geringen Gebrauch von solchen Behandlungen gemacht haben. Es giebt jedoch einige ganz allgemein gehaltene Bestimmungen, welche in vielen Fällen eine Anwendung gestatten und die daher hier in der Kürze besprochen werden sollen. Wir haben oben in §. 15. gefunden, daß die in einem Atome, welcher die Masse m und die Geschwindigkeit v hat, befindliche Kraft m v ist, und dieß gilt in gleicher Weise, der Atom mag einem flüssigen oder einem festen Körper angehören; befindet sich daher eine prismatische Flüssigkeitsmasse vom Querschnitt Q in einer Bewegung mit der Geschwindigkeit v unter Umständen,

wo sich die Kraft eines jeden ihrer Atome an einer bestimmten Stelle in einen andern Körper übertragen muß, so gelangen alle Atome einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt Q und der Länge v, deren Volumen Q v ist, in der Zeiteinheit zur Absetzung ihrer Kraft in den andern Körper, es geht also während der Zeiteinheit in diesen Körper die Kraft M v über, wenn M die Summe der Massen aller Atome in jener Flüssigkeitssäule, d. h. die Masse dieser Säule bezeichnet. Hat nun diese Säule an allen ihren Stellen dieselbe Dichtigkeit D, so ist, weil die Dichtigkeit die Masse dividirt durch das Volumen eines Körpers ist (vergl. §. 5.), die Masse ein Produkt aus der Dichtigkeit in das Volumen, also hier $M = D . Q v$, folglich ist die in der Zeiteinheit übertragene Kraft $M v = D Q v^2$. Diese Kraft ist sonach der Dichtigkeit der Flüssigkeit, ihrem Querschnitte und dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit proportional.

Bewegt sich ein fester Körper im Innern einer Flüssigkeit, so ist er gezwungen, diese vor sich herzutreiben und zu diesem Zwecke einen Theil seiner Kraft zu verwenden. Unter Umständen nun, wo er die ganze vor ihm liegende Flüssigkeitssäule in eine Bewegung von derselben Geschwindigkeit versetzen muß, ist die von ihm an die Flüssigkeit in der Zeiteinheit abzutretende Kraft wieder $D Q v^2$, wo D die Dichtigkeit der Flüssigkeit, Q und v aber den Querschnitt und die Geschwindigkeit des bewegten Körpers vorstellen, wie sich eben so erweisen läßt, wie zuvor; nur muß jetzt dieser Verlust an Kraft auf eine unendlich kleine Zeit bezogen werden, während welcher die Geschwindigkeit als sich gleich bleibend angesehen werden kann. Man nennt die durch das Dasein der Flüssigkeit in bewegten Körpern verloren gehende Kraft den Widerstand der Flüssigkeit. Das soeben für den Widerstand einer Flüssigkeit erhaltene Resultat zeigt sich in ziemlich guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung, so lange die Bewegungen mit mäßig großer Geschwindigkeit geschehen; es weicht indessen ziemlich beträchtlich von der Erfahrung ab, da wo sehr große Geschwindigkeiten vorhanden sind. Dies erklärt sich aus dem Umstande, daß der Druck in der Flüssigkeit vor dem bewegten Körper bedeutend größer, hinter ihm bedeutend kleiner wird, wodurch eine Seitenbewegung der Flüssigkeit nach außen vor dem festen Körper, nach innen hinter ihm entsteht, die eine Aenderung in der Bestimmung des Widerstandes nöthig macht.

Kapitel V.

Wirkungen der Schwere in festen Körpern.

§. 23. Allgemeine Eigenschaften der Schwerkraft.

Wir haben im Vorhergehenden dargelegt, wie sich aus den Bewegungen der Himmelskörper erschließen läßt, daß sich die kleinsten materiellen Theile gegen einander in Bewegung zu setzen streben mit einer Kraft, die dem Quadrat ihrer jedesmaligen Entfernung von einander umgekehrt proportional ist, und deßhalb mit deren Abstande sich fort und fort ändert. Diese zwischen je zwei materiellen Theilchen sich äußernde Kraft nennt man die Gravitation der Materie. In ihr liegt auch die Ursache, warum alle Körper, die sich in der Nähe von der Oberfläche der Erde befinden, nach dieser hingezogen werden; man pflegt indessen den Einfluß unserer ganzen Erde auf Atome in ihrer nächsten Umgebung Schwerkraft zu nennen, so daß man unter Schwerkraft die Mittelwirkung aus allen Atomen, woraus unsere Erde besteht, auf einen einzigen in ihrer Nähe befindlichen versteht. Die Mittelwirkung der Schwerkraft auf die sämmtlichen Atome eines Körpers zu einer bestimmten Zeit nennt man das Gewicht dieses Körpers. Es offenbart sich das Gewicht eines Körpers durch dessen Einwirkung auf einen andern, der jenen zur Ruhe zwingt, wie z. B. wenn ersterer auf einem andern unbeweglichen ruhig liegt, oder wenn er an einem Faden hängend durch einen ruhenden von jeder Bewegung abgehalten wird. In letzterm Falle giebt die Richtung des gespannten Fadens die Richtung des im getragenen Körper sich äussernden Gewichtes zu erkennen, dem in §. 8. aufgestellten Principe gemäß. Man giebt dieser Richtung den Namen der zu dem Orte, wo man sie beobachtet, gehörigen lothrechten, so wie eine auf ihr senkrechte Ebene eine wagrechte oder horizontale Ebene des Ortes genannt wird. Vorrichtungen, welche eigens dazu bestimmt sind, lothrechte Richtungen anzuzeigen, heißen Senkel oder Lothe. Jede in einer wagrechten Ebene liegende und durch deren Ort gehende Gerade heißt bezüglich auf die dazu gehörige lothrechte Richtung eine wagrechte, welch letztere also jede durch den Ort hindurch gehende und auf der lothrechten senkrecht stehende Richtung ist. Ist die eine Seite eines Dreiecks völlig gerade und zieht man in der Ebene des Dreiecks eine Gerade, welche senkrecht auf dieser Seite steht, hängt an einer Stelle dieser Geraden ein Senkel auf, so giebt diese Seite eine wagrechte Richtung an, so wie das Senkel frei beweglich längs der auf diese Seite senkrecht gezogenen Geraden herabhängt; eine solche Vorrichtung hat den Namen einer Senkwage erhalten.

Man hat beobachtet, daß die lothrechten Richtungen stets senkrecht stehen auf den Oberflächen ruhiger Gewässer, wie Seen oder Meere; diese Oberflächen aber bilden die kugelförmige Begrenzung unserer Erde; es laufen sonach die lothrechten Richtungen nach dem Mittelpunkte unserer Erde hin, woraus sich schließen läßt, daß die Mittelwirkung der Schwerkraft auf eine außerhalb der Erde befindliche sehr kleine Masse nach dem Mittelpunkt der Erde hingerichtet ist. Nun lehrt aber die Statik, daß die Mittelwirkung eines kugelförmigen Körpers auf einen Atom nur dann nach dessen Mittelpunkt hingerichtet sein kann, wenn derselbe überall die gleiche Dichtigkeit besitzt, oder doch aus concentrischen Schichten von gleicher Dichtigkeit besteht, woraus wir abzunehmen berechtigt werden, daß unsere Erde diese Beschaffenheit wenigstens so nahe in sich trägt, daß die etwaigen Unterschiede auf gewöhnliche Weise von uns nicht mehr beobachtet werden können. Auf dem Festlande in der Nähe von Bergen hat man in der That eine Ablenkung der lothrechten Richtung zur Seite des Mittelpunktes der Erde nach dem Berge hin wiewohl nur von sehr geringer Größe bemerkt, welche Abweichung jedoch nur als eine besondere Wirkung des über die Erdoberfläche emporgetriebenen Berges zu betrachten ist, die in einiger Entfernung von ihm sich wieder gänzlich aller Beobachtung entzieht, also immer nur als vereinzelte Ausnahme von der Regel sich ankündigt.

Da die Richtungen der durch die Schwere in den einzelnen Atomen eines festen Körpers geweckten Kräfte stets nach dem Mittelpunkte der Erde hinzielen, so darf man alle die Richtungen, welche sich auf die verschiedenen Atome eines in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen festen Körpers von nicht beträchtlicher Ausdehnung beziehen, als unter sich parallel ansehen; denn es beträgt der Halbmesser der Erde sehr nahe 860 Meilen oder 20640000 Fuß, denkt man sich also zwei Punkte eines festen Körpers 100 Fuß unter sich und von der Oberfläche der Erde entfernt, so würde die Entfernung der zwei Stellen, in welchen die Erdoberfläche von den Geraden, die von jenen beiden Punkten aus nach dem Mittelpunkte der Erde hin gezogen werden, getroffen wird, einen Abstand von einander haben, der durch folgende Proportion gefunden wird:

$$20640100 : 20640000 = 100 : (x = 99.9995 \text{ Fuß}),$$

was von 100 Fuß nicht merklich verschieden ist. Es wäre sonach der Nichtparallelismus jener beiden Geraden selbst in einer 100 Fuß langen Strecke durch unsere Sinne nicht mehr aufzufinden, und noch weniger träte er hervor, wenn entweder der Abstand jener beiden Punkte von einander oder die Länge der zu untersuchenden Strecke beträchtlich kleiner wird.

Um zu der Einsicht zu gelangen, daß auch die Größe der Kraft, welche durch die Schwere in einem nahe an der Erdoberfläche befindlichen Atom hervorgerufen wird, als merklich gleich angesehen werden kann, wenn schon der Atom seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde bis zu 100 Fuß hin abändert, muß man wissen, daß den statischen Rechnungen gemäß die Größe

der Kraft, welche eine Kugel von der Beschaffenheit wie wir uns unsere Erde vorzustellen haben, auf einen Atom ausübt, gleich ist einem Quotienten, dessen Zähler das Produkt aus der Masse des Atoms und der der Erde, und dessen Nenner das Quadrat der Entfernung des Atoms von dem Mittelpunkte der Erde ist. Dieses Resultat wird durch folgende Gleichung ausgesprochen:

$$K = \frac{m\,M}{r^2}, \qquad (a.)$$

worin m die Masse eines Atoms, M die der Erde, r die Entfernung des Atoms vom Mittelpunkte der Erde und K die Größe der von der Erde im Atom hervorgerufenen Kraft bezeichnet. Denkt man sich denselben Atom in verschiedener Entfernung vom Mittelpunkte der Erde liegend, so behalten m und M in obiger Gleichung bei allen Stellungen des Atoms ihre Werthe unverändert bei, die Größe der im Atom hervorgerufenen Kraft K aber ändert sich den zu verschiedenen Stellungen gehörigen Werthen von r gemäß. Nehmen wir den Atom in der Oberfläche der Erde liegend an, so ist sein r der Halbmesser der Erde selber, also gleich 20640000 Fuß; liegt hingegen der Atom hundert Fuß über der Erdoberfläche, so ist sein r jetzt 20640100 Fuß also nicht ganz um $\frac{1}{200000}$ größer als zuvor. Diesem gemäß wird das r^2 in letzterem Falle nicht ganz um $\frac{1}{100000}$ größer als im vorigen Falle, und dem zur Folge sind die Werthe von K in den beiden Fällen nicht um $\frac{1}{100000}$ ihrer Größe von einander verschieden. Solche Unterschiede sind aber durch die schärfsten Messungen nicht mehr zu entdecken, daher unter gewöhnlichen Umständen und selbst bis zu Distanzen von ein paar hundert Fuß hin die Kräfte in den beiderlei Stellungen des Atoms als einander völlig gleich angesehen werden dürfen. Es geht aus der eben aufgestellten Gleichung $K = \frac{m\,M}{r^2}$ noch eine andere Folgerung hervor, die wir nicht außer Acht lassen wollen. Da nämlich, wie in dem §. 15. dargethan worden ist, die Kraft eines bewegten Atoms ein Produkt aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit ist, so daß man hat:

$$K = m\,v, \qquad (b.)$$

wenn v die Geschwindigkeit des mit der Kraft K bewegten Atoms von der Masse m vorstellt, so geht die Gleichung (a) über in:

$$v = \frac{M}{r^2}, \qquad (c.)$$

und zeigt, daß die Geschwindigkeit,*) in welche ein Atom durch die von der Erde ausgehende Anziehung versetzt wird, von seiner Masse unabhängig ist, und dieselbe bei allen gleichweit vom Mittelpunkte der Erde abliegenden Atomen bleibt.

*) Diese Geschwindigkeit erlangt erst durch Ansammlung der Kräfte eine endliche Zeit hindurch eine endliche Größe, und ist daher in sofern sie aus einer augenblicklichen Einwirkung der Schwere entspringt, unendlich klein.

§. 24. Vom Gewichte fester Körper.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraph gesehen haben, daß alle Einwirkungen der Schwere auf die Atome eines in der Nähe der Erdoberfläche liegenden Körpers von mäßiger Ausdehnung ohne Bedenken als solche in den Atomen erzeugte Kräfte angesehen werden können, deren Richtungen sämmtlich unter sich parallel und dem Mittelpunkte der Erde zugekehrt sind, und deren Größen eine solche Beschaffenheit haben, daß sie in jedem dieser Atome eine und dieselbe Geschwindigkeit hervorrufen, so geht aus §. 20. sogleich hervor, daß solche feste Körper durch die Schwere zu einer rein fortschreitenden Bewegung angetrieben werden, die ganz die gleiche ist, wie wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Mittelpunkt der Masse vereinigt wäre. Den hier bei der Schwere in's Spiel kommenden Mittelpunkt der Masse nennt man zum Unterschiede Schwerpunkt, um damit zugleich anzudeuten, daß das von ihm Ausgesagte nur unter den vorhin angezeigten Beschränkungen gilt. Die Mittelkraft von allen den Kräften, welche durch die Erde in den einzelnen Atomen eines an ihrer Oberfläche liegenden festen Körpers von nicht beträchtlicher Ausdehnung hervorgerufen werden, ist, dem so eben angezogenen Paragraphen gemäß, an Größe der Summe aller in den einzelnen Atomen wirkenden Kräfte gleich, ihre Richtung ist denen der einzelnen Atome gleichläufig, und ihr Sitz ist in dem Schwerpunkt des Körpers. Diese Mittelkraft ist es, welche man das Gewicht des Körpers nennt. Bezeichnen wir es durch $\mathfrak{G}$ sowie die Masse des Körpers durch $\mathfrak{M}$, so erhält man durch Anwendung der Gleichung (a) im vorigen Paragraph:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\,\frac{M}{r^2}\,. \qquad (a)$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß das Gewicht eines Körpers nur so lange das gleiche bleibt, als sich derselbe in der gleichen Entfernung vom Mittelpunkt der Erde befindet, und daß dasselbe in beträchtlich größern Höhen kleiner wird. Es besitzt aber überdieß unsere Erde eine Eigenthümlichkeit, die einen Einfluß auf das Gewicht eines Körpers hat, nämlich ihre Axendrehung. Hieraus entspringt eine Centrifugalkraft in den auf ihr befindlichen Körpern, die, in soweit sie deren Gewichten entgegenwirkt, diese vermindert. Hierin liegt der Grund, warum das Gewicht eines und desselben Körpers auf unserer Erde unter dem Aequator einen geringern Effect hervorbringt, als an den Polen, wie Richer aus Versuchen an dem Pendel zuerst wahrgenommen hat.

Vermöge des in den Körpern durch die Einwirkung unserer Erde erzeugten Gewichtes streben dieselben eine Bewegung einzugehen, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Erde geht, wobei sich die in den auf einander folgenden Augenblicken durch die stetig wirkende Schwere erzeugten Gewichte des Körpers zu einer stets größer werdenden Kraft vereinigen. Man nennt dieß

den **Fall der Körper** und zwar den **freien Fall**, wenn man sich außer der Schwere keine andere Ursache zur Bewegung vorstellt. Ist der gegen die Oberfläche der Erde fallende Körper nicht über 100 Fuß von ihr entfernt, so kann man sich, wie am Ende des vorigen Paragraphen dargethan worden ist, die Größe der Kräfte, welche in jedem Augenblicke das Gewicht des Körpers bilden, als gleich während der ganzen Dauer der Bewegung vorstellen und da auch die Richtung dieser Kräfte stets die gleiche bleibt, so entsteht eine stetig und gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Gesetze wir in §. 16. an dem dort behandelten Beispiele entwickelt haben, welchem gemäß stets

$$V = TG \quad \text{und} \quad S = \tfrac{1}{2} T^2 G \qquad \text{(b)}$$

ist, wenn T die Dauer des Fallens, V die am Ende des Fallens erlangte Geschwindigkeit, und S den ganzen, während des Fallens vom Körper durchlaufenen Raum bezeichnet. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen (b) die Größe T, so findet man

$$S = \tfrac{1}{2} \frac{V^2}{G},$$

woraus sich ergiebt:

$$V = \sqrt{2SG}. \qquad \text{(c)}$$

Setzt man in den beiden Gleichungen (b) $T = 1$, so werden sie $V = G$ und $S = \frac{1}{2} G$ und geben dadurch zu verstehen, daß G die zu Ende des Fallens während einer Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit, oder der doppelte vom Körper durchlaufene Raum ist, wenn der Fall nur auf die Dauer der Zeit-Einheit sich erstreckt hat. Diese Größe G pflegt man die **Beschleunigung der Schwere** zu nennen. In den Gleichungen (b) sind alle Gesetze des freien Falles unter der gemachten Einschränkung so vollständig enthalten, daß wir ihnen nichts weiter hinzuzufügen haben.

Ist ein in der Stelle a (Fig. 18.) befindlicher fester Körper in einer rein fortschreitenden Bewegung begriffen, wobei er in der Richtung ah_7 die Geschwindigkeit u hat, und wirkt von da ab die Schwere unablässig auf ihn ein, so kann man sich die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt vereinigt vorstellen, so daß sich die fragliche Bewegung auf die eines einzigen Atoms zurückführen läßt. Sind die Dimensionen der Bahn dieses Körpers nicht so groß, daß sie die im vorigen Paragraph untersuchten Entfernungen beträchtlich übersteigen, so kann man die Richtungen aller Schwerewirkungen auf den festen Körper als unter sich parallel und gleichläufig, so wie die Mittelwirkung der Schwere auf den festen Körper als gleich groß an allen Stellen seiner Bahn ansehen. Deßhalb geht der feste Körper die im §. 18. entwickelte stetig und gleichförmig zur Seite getriebene Bewegung ein, wenn nichts anders als die Schwere Einfluß darauf hat, und man findet seine Stelle zu irgend einer Zeit T, wenn man von a aus eine Länge $y = Tu$ in der Richtung ah_7 einträgt und vom Endpunkt der Länge y aus in die

lothrechte Richtung ein Stück $x = \frac{1}{2} T^2 G$ aufträgt, wodurch ein Punkt erhalten wird, der die Stelle des Schwerpunkts des bewegten Körpers in dem durch T bestimmten Augenblicke zu erkennen giebt. Hierbei ist x nichts anders, als der vom Körper in der Zeit T durchlaufene Raum, wenn während dieser Zeit die Schwere allein auf ihn einwirkte, so daß $\frac{1}{2}$ G den in der Zeiteinheit von der Ruhe aus durchfallenen Raum vorstellt. Eine solche Bewegung nehmen geworfene Körper unter der gemachten Voraussetzung an; man hat ihr daher den Namen Wurfbewegung gegeben. Die Wurfbewegung, auf welche nichts außer der Schwere Einfluß hat, und die wir wie beim Falle freie Wurfbewegung nennen können, ist vollkommen bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$y = Tu \quad \text{und} \quad x = \tfrac{1}{2} T^2 G. \qquad (d)$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe T, so findet man

$$x = \tfrac{1}{2} \frac{y^2}{u^2} G, \qquad (e)$$

und dieß ist die Gleichung für die Bahn des Körpers, welche sogleich zu erkennen giebt, daß diese Bahn eine Parabel ist, so oft die Bewegung der gemachten Voraussetzung entspricht. Diese Wurfbewegung geht in den freien Fall mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit in der lothrechten Richtung von oben nach unten über, wenn die Richtung ah_7 (Fig. 18.) der lothrechten parallel und gleichläufig ist. Bezeichnet dann S den in der Zeit T durchlaufenen Weg, so ist:

$$S = Tu + \tfrac{1}{2} T^2 G.$$

Ist hingegen die Richtung ah_7 der lothrechten zwar parallel aber gegenläufig, und bezeichnet S wieder den bei dieser Bewegung in der Zeit T durchlaufenen Raum, so ist hier:

$$S = Tu - \tfrac{1}{2} T^2 G.$$

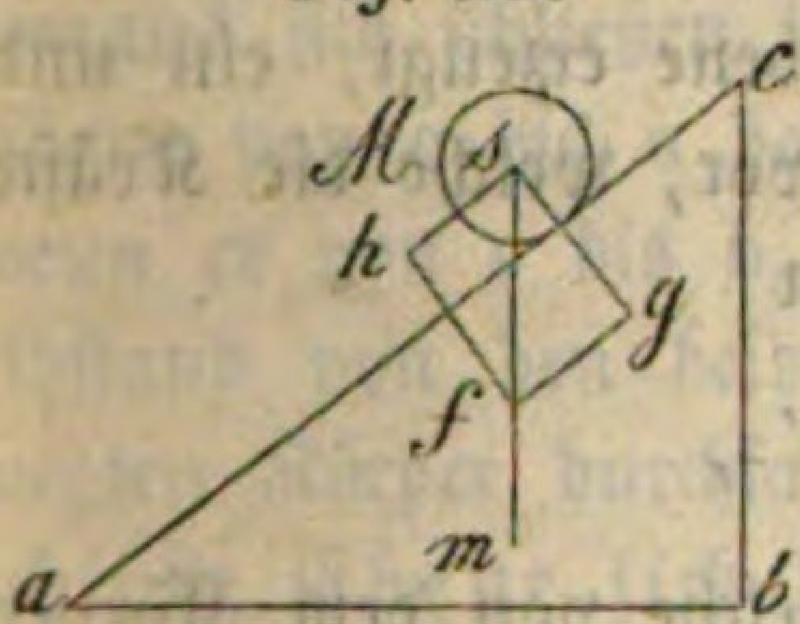
In diesem letztern Falle spricht sich ein Beispiel von einer stetig und gleichförmig verzögerten Bewegung aus.

In der Natur giebt es weder einen freien Fall, noch eine freie Wurfbewegung, weil die Oberfläche unserer Erde von einem Luftmeere umgeben ist, in welchem sich die fallenden wie die geworfenen Körper bewegen, und dieß Ursache wird zu fortwährenden Abänderungen durch den Widerstand, den es dergleichen Bewegungen entgegensetzt. Dieser Widerstand ist indessen sehr gering, so lange die gedachten Bewegungen nur mit mäßiger Geschwindigkeit geschehen, weßhalb jene Collegienversuche, welche man zur Demonstration der Gesetze des freien Falles und der freien Wurfbewegung anzustellen pflegt, ihren Zweck noch recht gut erreichen, obschon dabei die Bewegungen in der Luft geschehen, und deßhalb nicht mehr eigentlich freie sind.

§. 25. Von der Bewegung längs der schiefen Ebene.

Wenn ein durch die Schwere zur Bewegung angetriebener fester Körper sich auf einer Ebene befindet, die mit der lothrechten Richtung einen schiefen Winkel bildet, so hält diese Ebene den festen Körper von seinem Falle, jedoch nicht von einer Bewegung längs dieser Ebene ab, wie aus nachstehender Betrachtung hervorgeht. Ist nämlich ac (Fig. 24.) der Durchschnitt einer durch die lothrechte Richtung und durch die Normale dieser Ebene gelegten Ebene mit ihr, und stellt bc die lothrechte, ab die wagrechte Richtung in dieser Durchschnittsebene vor, so wirkt das Gewicht eines auf der schiefen Ebene ac befindlichen Körpers M an dessen Schwerpunkt s in einer Richtung sm ein, die mit der Geraden cb parallel läuft. Trägt man die Größe der Kraft, welche das Gewicht des Körpers ausmacht, als Länge in die Richtung sm von s bis f ein, zieht sowohl durch s wie durch f zwei Gerade, wovon die eine mit ac parallel läuft, die andere senkrecht auf ac steht, so entsteht das rechtwinklige Parallelogramm shfgs und man kann statt des Gewichtes zwei andere Kräfte setzen, welche in den Richtungen sh und sg wirken, und deren Größen durch die Längen sh und sg bestimmt werden. Von diesen zwei Kräften wirkt die eine sg senkrecht gegen die Ebene ac, und wird von dieser, wenn sie unbeweglich ist, gänzlich aufgenommen und vernichtet, so daß nur noch die andere sh in dem Körper M übrig bleibt, womit derselbe gänzlich ungehindert *) längs der Ebene ca sich in Bewegung setzen kann. Wir wollen nun die Größe dieser Kraft bestimmen. Da die Geraden sh und sf mit denen ca und cb parallel laufen, so ist der Winkel hsf dem acb gleich, und da zudem die Dreiecke fhs und abc bei h und b rechtwinklig sind, so sind sie einander ähnlich, und es findet an ihnen die folgende Proportion statt:

Fig. 24.



$$hs : fs = bc : ac,$$

woraus man findet:

$$hs = fs \cdot \frac{bc}{ac} . \qquad (a)$$

Wo aber auch der Körper M sich auf der schiefen Ebene ca befinden mag, so erzeugt sein Gewicht immer eine Kraft, welche ihn längs der Richtung ca treibt, und deren Größe durch die Länge hs angezeigt wird, es geräth daher dieser Körper dem in §. 16. mitgetheilten Beispiele zur Folge in eine stetig

*) Allerdings tritt in der Wirklichkeit noch ein Hinderniß ein, das durch das Wort Reibung bezeichnet und von welchem später noch gesprochen wird, das wir aber hier außer Acht lassen.

und gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche aus den dortigen Gleichungen (4) und (6) hervorgeht, in denen $\frac{v}{t} = G$ gesetzt worden ist, während v die aus einem Veränderungsimpuls hervorgehende Geschwindigkeit und t das Zeitintervall zwischen zwei zunächst aufeinanderfolgenden solchen Impulsen bezeichnet. Nun ist aber offenbar das Zeitintervall zwischen aufeinanderfolgenden Impulsen der Schwere, welche den freien Fall des Körpers hervorruft, und der Kraft, welche die Bewegung längs der schiefen Ebene erzeugt, ein und dasselbe; stellen daher v und v′ die Geschwindigkeiten vor, welche die Kräfte gf und hs in dem Körper M erzeugen, und macht man

$$\frac{v}{t} = G \quad , \quad \frac{v'}{t} = G' ,$$

wo dann G und G′ die doppelten Räume bezeichnen, welche von dem Körper M in der ersten Zeiteinheit in Folge der beiderlei Bewegungen durchlaufen werden, so ist

$$G : G' = v : v' ;$$

weil aber die in demselben Körper M durch die Kräfte fs und hs erzeugten Geschwindigkeiten v und v′ diesen Kräften selber proportional sind, so kann man die vorstehende Proportion auch so schreiben:

$$G : G' = fs : hs ,$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichung (a) wird:

$$G : G' = ac : ab$$

und nun giebt:

$$G' = G . \frac{bc}{ac} . \qquad \text{(b)}$$

Hieraus folgt, daß die Bewegung längs der schiefen Ebene durch dieselben zwei Gleichungen bestimmt wird, wie der freie Fall der Körper, nur muß in ihnen statt der dem freien Fall entsprechenden Größe G die $G . \frac{bc}{ac}$ gesetzt werden, wobei indessen auf die Reibung noch keine Rücksicht genommen worden ist. Die Bewegung auf der schiefen Ebene befolgt also dieselben Gesetze, wie die des freien Falles, nur daß sie im Verhältniß von bc : ac langsamer geschieht. Galiläi, dessen Geist die Gesetze des freien Falles auffand, hat dieselben in der That auch an der schiefen Ebene dem Auge sichtbar gemacht. Es werden demnach die Gleichungen (4) und (6) des §. 16. auf unsere schiefe Ebene angewandt:

$$V = TG \frac{bc}{ac} \quad \text{und} \quad S = \frac{1}{2} T^2 G \frac{bc}{ac} , \qquad \text{(c)}$$

worin G dieselbe Bedeutung hat, wie beim freien Fall, S aber den in der Zeit T längs der schiefen Ebene zurückgelegten Weg und V die am Ende dieses Weges im Körper vorhandene Geschwindigkeit vorstellt. Aus diesen beiden

Gleichungen erhält man durch Elimination der Größe T die folgende, der Gleichung (7.) in §. 16. beim freien Fall entsprechende Gleichung:

$$V^2 = 2 S G \frac{bc}{ac}. \qquad (d)$$

Die eben genannte Gleichung (7.) giebt für $S = bc$ $V^2 = 2bc.G$, und die vorstehende Gleichung (d) giebt für $S = ac$ ebenfalls $V^2 = 2G.bc$, woraus sich schließen läßt, daß ein Körper, welcher sich längs der schiefen Ebene von c bis a herabbewegt hat, die gleiche Geschwindigkeit erhält, wie wenn er von c bis b herab frei gefallen ist; es ist aber bc der lothrechte Abstand von den beiden Endpunkten der längs der schiefen Ebene vom bewegten Körper durchlaufenen Bahn, so daß man sagen kann: Der eine schiefe Ebene sich herabbewegende Körper erlangt dieselbe Geschwindigkeit, wie wenn derselbe den lothrechten Abstand zwischen den Endpunkten seiner Bahn frei durchgefallen wäre.

Setzt man in der Gleichung (6.) des §. 16. $S = bc$, so wird sie

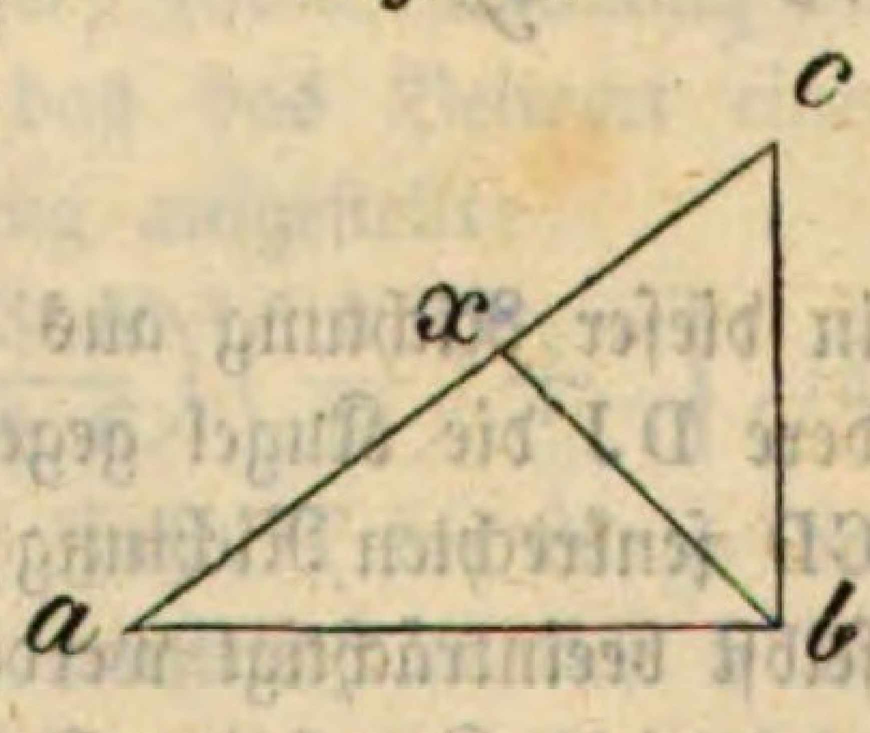
$$bc = \frac{1}{2} T^2 G,$$

und setzt man in der vorstehenden hintern Gleichung (c) $S = \frac{bc^2}{ac}$, so wird sie ebenfalls:

$$bc = \frac{1}{2} T^2 G,$$

woraus sich schließen läßt, daß auf den freien Fall durch die Strecke bc eben so viel Zeit verwendet wird, wie auf die Bewegung längs der schiefen Ebene durch die Strecke $\frac{bc^2}{ac}$. Man erhält aber die Strecke $\frac{bc^2}{ac}$ aus dem hierneben (Fig. 25.) besonders abgebildeten Dreieck abc der Fig. 24., wenn man von b aus eine Senkrechte bx auf ac fällt, welche diese in x schneidet, dann ist nämlich

Fig. 25.



$$cx = \frac{bc^2}{ac},$$

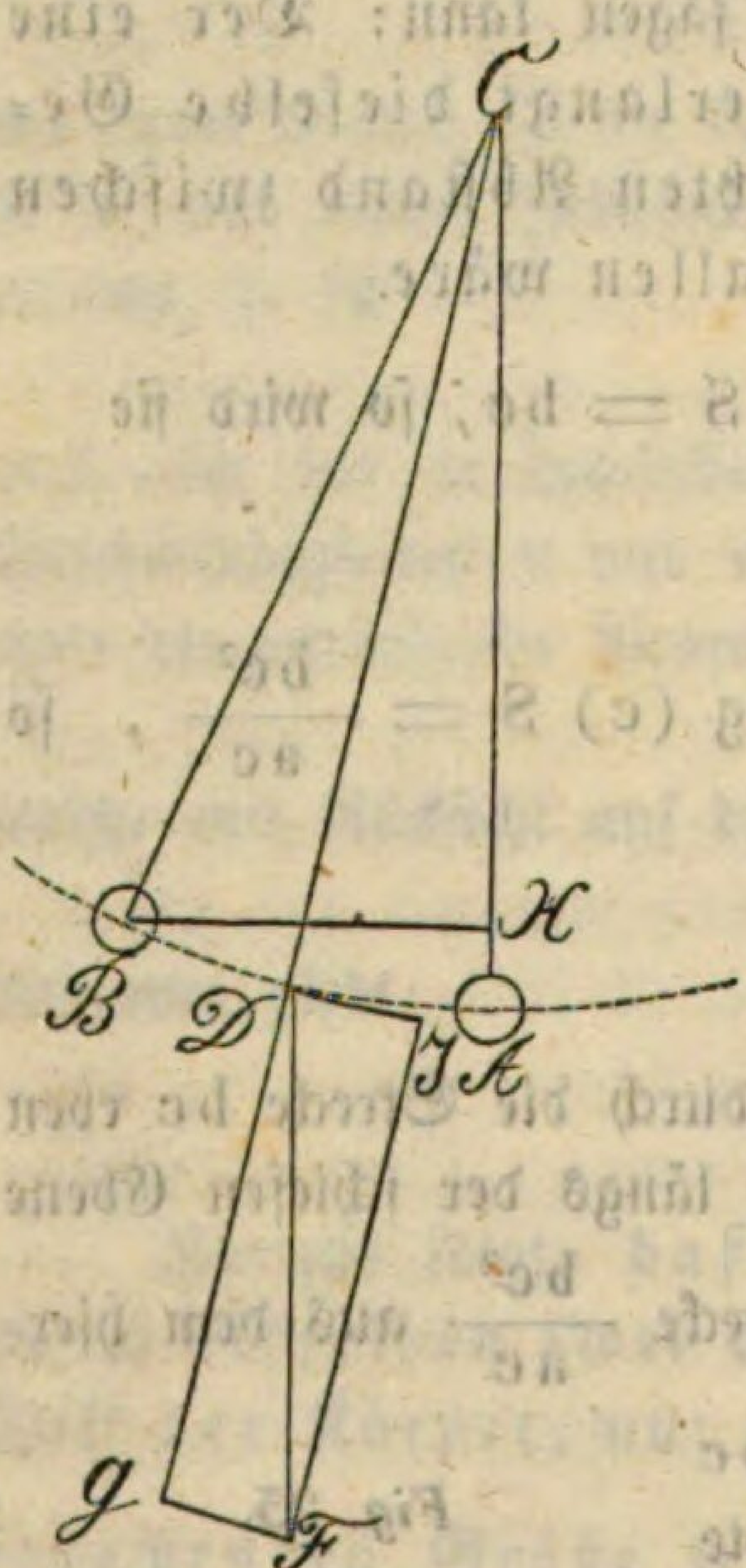
wie man sogleich einsieht, wenn man erwägt, daß bxc und abc ähnliche Dreiecke sind, aus denen sich die vorstehende Gleichung unmittelbar ableiten läßt. Denkt man sich um bxc einen Kreis beschrieben, so ist bc dessen lothrechter Durchmesser, weßhalb man sagen kann, daß ein Körper durch den lothrechten Durchmesser eines Kreises in derselben Zeit herabfällt, in welcher er sich durch eine von seinem höchsten Punkte aus gezogene Sehne cx wie auf einer schiefen Ebene herabbewegt.

Der vor diesem hinter der Gleichung (d) stehende gesperrte Satz läßt sich erweitern und lautet dann so: Ein durch irgend ein Curvenstück wie auf einer schiefen Ebene herabgleitender Körper erlangt durch diese Bewegung dieselbe Geschwindigkeit, wie wenn er eine Strecke frei durchfällt, die dem lothrechten Abstande der beiden Endpunkte des Curvenstücks von einander gleich ist.

§. 26. Von der Pendelbewegung.

Wenn das eine Ende eines Fadens (Fig. 26.) in C aufgehängt, und am andern Ende eine der Schwere unterworfene Kugel befestigt ist, so wird im Ruhestande A dieser Kugel der Faden CA in einer lothrechten Richtung durch das Gewicht der Kugel ausgespannt erscheinen. Wird nun die Kugel unter steter Spannung des Fadens aus ihrer Ruhelage A in einer durch CA gelegten Ebene bis in die Stellung B geführt, während dem sie einen Kreis um C beschreibt, und hier sich selber überlassen, so wird sie denselben Kreis zurück bis A beschreiben, weil in jeder Stellung zwischen B und A, wie z. B. D das Gewicht der Kugel in der mit CA parallelen Richtung DF auf den Mittelpunkt der Masse D einwirkt. Stellt die Länge DF die Größe jenes Gewichtes vor, und beschreibt man über DF als Diagonale ein Rechteck DGFJ, dessen eine Seite DG die Verlängerung von CD ist und dessen andere Seite DJ in der durch CA und CD hindurch gelegten Ebene liegt und senkrecht auf CD steht, so kann man die Kraft DF in der Kugel durch die beiden andern DG und DJ ersetzen, von welchen die DG blos den Faden gespannt erhält und wegen seiner Unbeweglichkeit in dieser Richtung aus der Kugel in die Stelle C übergeht, während die andere DJ die Kugel gegen ihre Ruhelage A hin treibt in einer auf den Faden CD senkrechten Richtung, weßhalb diese Kraft in keiner Weise von dem Faden selbst beeinträchtigt werden kann. An der Stelle D wird also die Kreisbewegung der Kugel durch die Kraft DJ beschleunigend verändert. Diese Kraft DJ nimmt allmählig an Größe ab, sowie die Stelle D mehr gegen die A hin rückt und verschwindet endlich ganz, wenn D in die Stelle A gekommen ist; es ist folglich die Bewegung der Kugel von B bis A eine ungleichförmig beschleunigte, deren Zunahme stets geringer wird und in A null ist. Alle diese beschleunigenden Kräfte sammeln sich in der Kugel, während sich dieselbe

Fig. 26.



von B bis A hinbewegt, zu einer Kraft an, vermöge welcher die Kugel ihre Kreisbewegung von A aus nach der gleichen Richtung hin fortsetzt und der Faden auf die andere Seite von CA gelangt; weil aber auf dieser Seite aus dem Gewichte der Kugel Kräfte hervorgehen, die bei gleicher Entfernung der Kugel von A völlig einerlei Größe erhalten wie auf der vorigen Seite, aber auf die Bewegung verzögernd wirken, wie sich durch eine der bei D analoge Construktion leicht nachweisen läßt, so nimmt die Bewegung der Kugel auf dieser andern Seite in umgekehrter Ordnung ganz eben so ab, wie sie auf der ersten Seite zugenommen hat. Darum gelangt die Kugel auf dieser andern Seite zur Ruhe, so wie sie eben so weit von A entfernt ist, als B von A auf der ersten Seite entfernt war, und ist dann in demselben Zustande, wie sie in B beim Anfang der Bewegung war; dieselbe Bewegung wird sich daher in umgekehrter Richtung völlig so wie eben wiederholen, und diese Bewegungen in umgekehrten Richtungen werden ewig fort mit einander abwechseln müssen, wenn nicht außer der Schwere noch andere Kräfte thätig sind, wodurch sie allmählig immer kleiner werden. Eine solche Vorrichtung wird Pendel genannt, und ein Aufgang desselben in Verbindung mit dem ihm vorangegangenen Niedergang heißt eine Schwingung des Pendels, sowie die zur Vollendung einer Schwingung erforderliche Zeit Schwingungsdauer.

Die Berechnung der Pendelbewegung unterliegt wegen der in ihr auftretenden ungleichförmigen Beschleunigungen und Verzögerungen größern Schwierigkeiten, als eine der von uns früher betrachteten Bewegungen. Zwar läßt sich die Geschwindigkeit des Pendelkörpers an jeder Stelle seiner Bahn mittelst der im vorigen Paragraph angegebenen Sätze immer leicht ermitteln; dafür aber ist die Bestimmung der Zeit, die er braucht, um aus einer bestimmten Stelle seiner Bahn in eine andere überzugehen, desto schwerer aufzufinden. Die Mechaniker haben jedoch unter der Voraussetzung, daß der Faden des Pendels gewichtslos und vollkommen biegsam, und daß alle Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte zusammengedrückt sei, zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines solchen ideellen Pendels, das das Beiwort eines mathematischen erhalten hat, die folgende Gleichung aufgestellt:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{G}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \ldots\right], \quad (a)$$

worin T die Schwingungsdauer, π die Ludolphsche Zahl, l die Länge des Pendels und G dieselbe Größe wie beim freien Fall vorstellt, endlich h die Erhebung des Pendelkörpers beim Beginn seiner Schwingungen über seine Ruhelage vorstellt. In Fig. 26. ist $l = AC$ und $h = AH$, wenn man sich BH senkrecht auf die lothrechte Richtung CA gezogen denkt. Es hält nicht schwer, den Umfang der Schwingungen eines Pendels so sehr zu verringern, daß $\frac{h}{2l}$ ein so kleiner Bruch wird, um das dritte Glied in der vorstehenden

Reihe (a) mit aller Sicherheit vernachlässigen und statt ihrer die Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{G}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{l}\right) \qquad (b)$$

setzen zu können, und selbst diese geht in die:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{G}} \qquad (c)$$

über, wenn man h unvergleichlich kleiner als l werden läßt, in welchem Falle man die Schwingungen des Pendels als **unendlich kleine** zu bezeichnen pflegt. Ist Z irgend eine gegebene Zeit, und wird diese durch die Schwingungsdauer eines Pendels dividirt, so giebt der Quotient die Anzahl der Schwingungen dieses Pendels in der Zeit Z zu erkennen. Bezeichnet man diese Anzahl durch n, wenn das Pendel unendlich kleine Schwingungen macht, und durch n′, wenn das Pendel nur so kleine Schwingungen macht, daß die Gleichung (b) auf dasselbe angewendet werden kann, so ist:

$$n = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{l}{G}}} \text{ und } n' = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{l}{G}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{l}\right)},$$

woraus folgt:

$$n : n' = \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{l}\right) : 1,$$

oder

$$n = n' \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{l}\right); \qquad (d)$$

man kann also die Zahl n′ der Schwingungen, welche ein Pendel, an welchem sich die Größe h noch messen läßt, in einer gegebenen Zeit macht, auf die Zahl n der Schwingungen zurückführen, welche ein Pendel unter der Voraussetzung unendlich kleiner Schwingungen in derselben Zeit machen würde, und so die Schwingungszeiten verschiedener Pendel auf ein und dasselbe gedachte Pendel zurückführen. Hierbei geht man am sichersten, wenn man die Größe $\frac{h}{l}$ aus dem Ausschlagswinkel BCA (Fig. 26.) des Pendels berechnet; es ist nämlich

$$h = l - CH \text{ und in Folge } \frac{h}{l} = 1 - \frac{CH}{l} = 1 - \cos BCA.$$

Das Pendel verkürzt zwar während es schwingt seinen Werth von h; diesem Uebelstande aber begegnet man dadurch, daß man die Werthe von h zu Anfang und zu Ende der Schwingungen beobachtet und das arithmetische Mittel aus diesen beiden Werthen nimmt, da wo man nicht das Pendel an einem Uhrwerk schwingen läßt, an welchem h stets den gleichen Werth behält.

Die Gleichung (a) würde indessen für die Anwendung des Pendels keine so große Wichtigkeit erlangt haben, indem ihr die Voraussetzung eines

mathematischen, in der Wirklichkeit nie darstellbaren Pendels zu Grunde liegt, wenn nicht die Statik im Stande wäre, jedes in der äußern Erscheinung sich darstellende Pendel, das man im Gegensatze zum mathematischen ein zusammengesetztes zu nennen pflegt, in ein mathematisches überzuführen, nämlich den Punkt anzugeben, in welchem man sich die sämmtliche Masse des zusammengesetzten Pendels vereinigt denken darf. Man nennt diesen Punkt den Mittelpunkt der Schwingungen (Centrum oscillationis) und seine Entfernung vom Aufhängungspunkt ist die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem behandelten zusammengesetzten Pendel eine und dieselbe Schwingungsdauer besitzt. Der holländische Physiker Huyghens, welcher derlei Untersuchungen mit dem glücklichsten Erfolge betrieb, führte das zusammengesetzte Pendel als einen Hauptheil in unsere Uhren ein, welcher die Bestimmung hat, ihnen einen völlig regelmäßigen Gang zu verschaffen. Dessen hierauf bezügliche Arbeiten finden sich niedergelegt in der Schrift: Huigenii horologium oscillatorium. Paris 1675. Fol. P. W.

§. 27. Anwendungen des Pendels.

Das Pendel erhielt in der Physik hauptsächlich deßhalb einen so hohen Rang, weil es ganz vorzüglich dazu geeignet war, die Aenderungen in der Schwere unserer Erde unter veränderten Umständen mit der äußersten Genauigkeit anzuzeigen. Ließ man nämlich eine Pendeluhr an irgend einer Stelle eine bestimmte Zeit hindurch gehen, wozu die Zeit von einem Sterndurchgang bis zum nächsten als eine völlig unveränderliche sich am besten eignet, und merkte man die Zahl n′ der Schwingungen an, die das Pendel dieser Uhr in der gewählten Zeit zurücklegte, so ließ sich daraus mittelst der im vorigen Paragraph mitgetheilten Gleichung (d) die Zahl n der Schwingungen berechnen, welche unter den gleichen Umständen von einem Pendel mit unendlich kleinen Schwingungen geliefert worden wäre, und hieraus ergab sich ganz leicht die Schwingungsdauer T dieses letztern Pendels mit aller nur wünschenswerthen Genauigkeit. Die diesem Pendel entsprechende Gleichung (c) des vorigen Paragraphs setzte nun in den Stand, den Werth G, welchem die Schwerkraft proportional ist, mit einer entsprechenden Genauigkeit aufzufinden, und so ließen sich die leisesten Veränderungen in der Schwerkraft mit großer Schärfe entdecken. Ging man z. B. mit einer solchen Uhr auf größere Höhen in derselben Gegend unserer Erde, so zeigte sie sogleich eine größere Schwingungsdauer und dieser entsprechend eine verminderte Schwerwirkung an, welche Unterschiede auf einigermaßen beträchtlichen Höhen groß genug werden, um mittelst ihrer das Gesetz der Abnahme der Schwere mit der Entfernung des Körpers, an dem sie sich äußert, vom Mittelpunkt der Erde mit Aussicht auf Erfolg untersuchen zu können. Die Hauptbemühungen der Physiker blieben

jedoch vorzugsweise auf jene Unterschiede gerichtet, welche die Schwere an Stellen der Erde, die unter verschiedenen Breiten liegen, zeigt. Im Jahre 1672 nahm der französische Astronom Richer wahr, daß seine auf einer Reise nach Cayenne, welches 5° nördlich vom Aequator liegt, mitgenommene Pendeluhr hier gegen ihren Gang in Frankreich um 2½ Minuten täglich nachging, und daß dieselbe, nachdem sie hier wieder in den rechten Gang gesetzt worden war, nach Paris zurück gebracht, um 148 Secunden täglich vorlief. Später wurden ähnliche Unterschiede durch die genauesten Beobachtungen an sehr verschiedenen Orten unserer Erde constatirt, aus denen im Allgemeinen ein allmähliges Anwachsen der Schwere vom Aequator nach den Polen hin hervorging. Man war um diese Zeit zu der Einsicht gelangt, daß die Axendrehung unserer Erde eine ungleiche Schwächung des Gewichtes der Körper an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche begründe, und hatte die Mittel aufgefunden, diesen Einfluß durch Rechnung völlig scharf zu bestimmen. Auch war den Physikern nicht entgangen, daß die Anzeigen des Pendels in verschiedenen Temperaturen ungleich sein müssen, da die Pendellängen selber mit der Temperatur sich ändern; sie bemühten sich, diesen Einfluß durch Rechnung zu bestimmen, oder sie bedienten sich zu ihren Versuchen des zur Abwendung dieses Uebels erfundenen sogenannten Compensationspendels, dessen Länge in allen Temperaturen die gleiche bleibt. Sie brachten überdieß die ungleiche Erhebung der Orte über den Meeresspiegel in Anschlag, und überzeugten sich sogar, daß der Widerstand der Luft, in welcher sich die Pendel bewegen, keinen merklichen Einfluß auf deren Schwingungsdauer ausübe. Bringt man aber bei den Ergebnissen der an verschiedenen Stellen der Erde beobachteten Pendelbewegungen auch alle die Correktionen an, welche sich aus den vorgenannten Untersuchungen herausgestellt hatten, und vergleicht man sie mit den Resultaten der an vielen Orten unserer Erde angestellten Gradmessungen, aus denen sich der Halbmesser unserer Erde am Aequator gleich 6376984^{m} und an den Polen gleich 6356324^{m} herausgestellt hat, so zeigt sich im Allgemeinen zwar eine gute Uebereinstimmung zwischen beiden, jedoch lassen sich kleine Ungleichheiten in den Pendelversuchen noch recht wohl bemerken, was anzudeuten scheint, daß örtliche Ungleichheiten auf unserer Erde Unregelmäßigkeiten im Gange des Pendels zur Folge haben, worüber wir uns nicht wundern dürfen, da Ursachen genug vorhanden sind, wodurch sowohl die Gestalt unserer Erde, als deren Dichtigkeit localen Abweichungen von der Regel ausgesetzt ist. Um von der Größe solcher Abweichungen einen Begriff zu geben, folgt ein Verzeichniß von den bisher beobachteten:

Beobachtungsorte:	Anzahl der Schwingungen, um welche das Pendel im Laufe eines Tages voreilte oder zurückblieb:
St. Thomas	+ 3,64
Maranham	— 6,18
Ascension	+ 3,16
Sierra Leona . . .	— 1,73
Trinidad	— 5,98
Bahia	— 3,28
Jamaika.	— 1,42
New York	— 0,63
London	— 0,43
Drontheim	— 2,72
Hammerfest. . . .	— 0,03
Grönland	+ 0,5
Spitzbergen	+ 4,19

Das Zeichen + vor der Anzahl der Schwingungen sagt aus, daß das beobachtete Sekunden-Pendel vor dem berechneten so viele Schwingungen voraus hatte; das Zeichen —, daß es so viele Schwingungen zurück blieb.

Die größten Abweichungen betragen etwa 6 Schwingungen im Tage, welches nicht der vierzehntausendste Theil der ganzen Wirkung ist, so daß man mehr darüber zu staunen Ursache hat, daß keine größeren Unterschiede gefunden worden sind.

Hat man für einen gegebenen Ort der Erde die Schwingungsdauer eines Pendels von bekannter Länge, welches unendlich kleine Schwingungen macht, mit aller hier erreichbaren Genauigkeit aufgefunden, so läßt sich mittelst der Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{G}}$$

der Werth von G, d. h. die Intensität der Schwere an diesem Orte mit einer auf keine andere Weise erreichbaren Schärfe bestimmen. Durch ein solches, zuerst von Borda benütztes Verfahren hat man gefunden, daß in Paris G = 9,8088^{m} und die Länge des Sekundenpendels gleich 993,8666^{mm} sei. Bei diesen Versuchen bot eine genaue Bestimmung der Länge des gebrauchten Pendels, d. h. die Umwandlung des zusammengesetzten Pendels in ein mathematisches die meisten Schwierigkeiten dar, und Borda half sich damit, ein zusammengesetztes Pendel von solcher Art zu wählen, wobei diese Länge am leichtesten und genauesten zu erkennen war. Seitdem hat man in dem von Bohnenberger zuerst angegebenen Reversionspendel ein sehr sinn-

reiches Mittel entdeckt, diesen Zweck mit aller nur wünschenswerthen Vollkommenheit zu erreichen. Dieser verdienstvolle Gelehrte wies nämlich nach, daß wenn man an einem cylinderischen Stabe zwei verschiebbare parallele Schneiden anbringt, um welche man den Stab schwingen läßt, und den Abstand der Schneiden so lange abändert, bis die Schwingungsdauer des Pendels um jede dieser beiden Schneiden völlig die gleiche wird, der Abstand beider Schneiden von einander nothwendig die Länge des diesem entsprechenden mathematischen Pendels anzeigt, wenn dabei nur der Schwerpunkt des Pendelkörpers zwischen den beiden Schneiden und im Allgemeinen in nicht gleicher Entfernung von ihnen liegt. In England stellte Kater mit einem solchen Reversionspendel Versuche in der Absicht an, die Länge des Londoner Sekundenpendels mit äußerster Genauigkeit zu erforschen, weil in England ein neues Maaß-System eingeführt werden sollte, zu dessen Einheit man diese Länge wählen wollte, wozu schon Huyghens die Länge des Sekundenpendels vorgeschlagen hatte, ohne jedoch noch zu wissen, daß diese Länge an verschiedenen Orten der Erde eine verschiedene ist. In England wurde diese Längeneinheit wieder aufgegeben, in Frankreich dafür der Meter gewählt als der 40 millionste Theil von der Länge eines Erdmeridians, wie sie sich aus den zu diesem Zwecke angestellten Gradmessungen herausgestellt hatte. Auf diesen Meter, für dessen Unwandelbarkeit die größte Sorgfalt genommen wurde, sind alle übrigen Längeneinheiten zurückgeführt worden, wodurch er eine hohe Bedeutung in der Wissenschaft sich erworben hat.

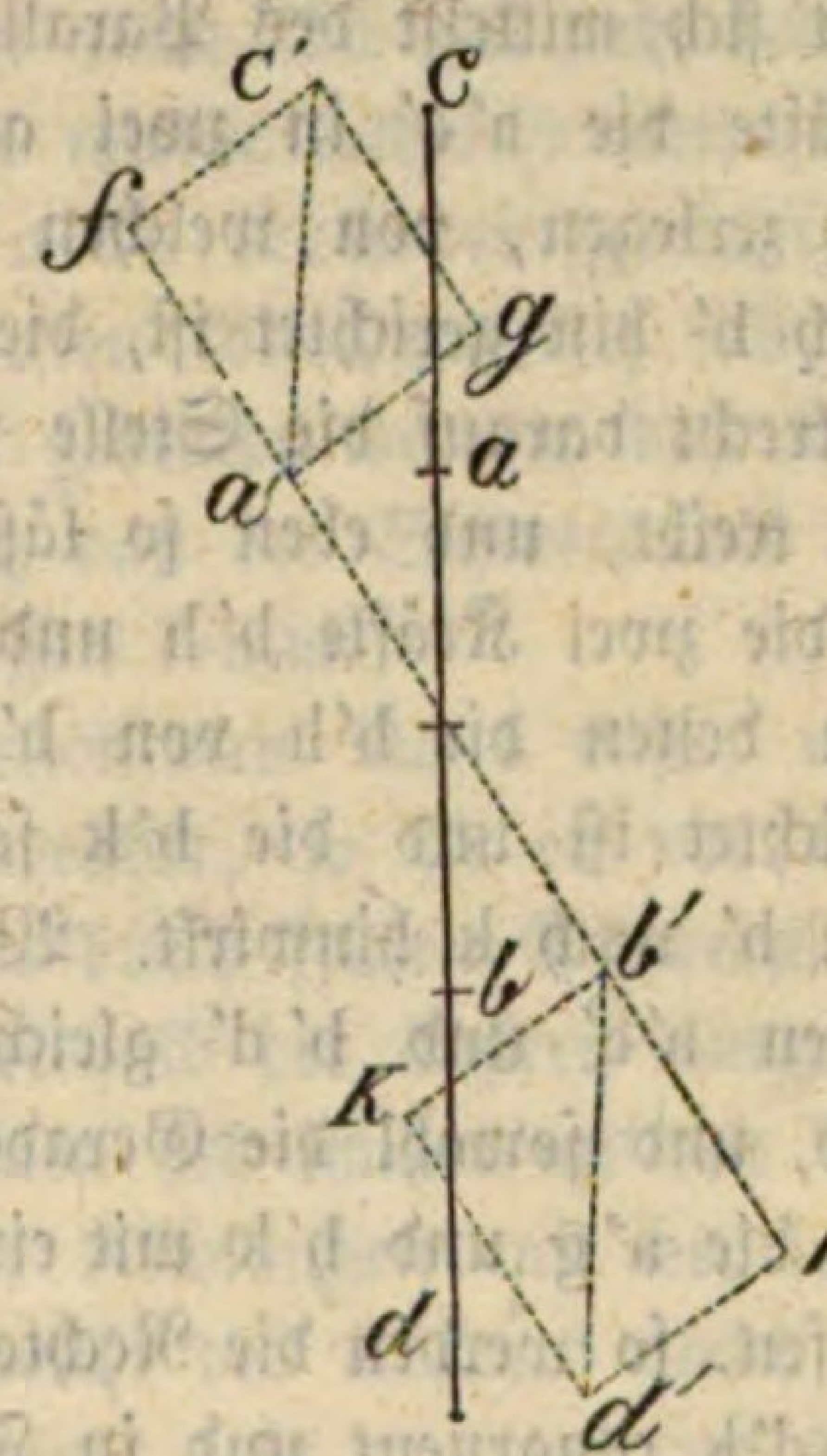
In neuerer Zeit hat das Pendel wiederholt die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf sich gezogen, wozu namentlich Bessel's meisterhafte „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels" die Anregung gaben; es scheinen aber die Akten über dieses hochwichtige Instrument noch nicht völlig geschlossen zu sein, wenn schon jene Untersuchungen auf mehrere neue bei dem Pendel zu berücksichtigende Umstände aufmerksam gemacht haben.

§. 28. Von den verschiedenen Arten der Gleichgewichtszustände eines festen Körpers.

Aus den bisher angegebenen Eigenschaften der Schwere lassen sich eine Menge Erscheinungen erklären, von denen wir die wichtigsten hier kurz besprechen werden. Da sich das Gewicht eines Körpers immer als eine einzige Kraft ansehen läßt, welche in der lothrechten Richtung wirkt und ihren Sitz im Schwerpunkt des Körpers hat, so läßt sich dasselbe immer durch eine einzige Kraft in's Gleichgewicht bringen, deren Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht und der lothrechten Richtung gerade entgegengesetzt ist, und deren Größe der des Gewichtes gleich ist, dem statischen Prinzip zur Folge. In diesem Prinzipe liegen indessen sehr verschiedene Gleichgewichtszustände verborgen, die wir an dieser Stelle von einander unterscheiden lernen müssen.

I. Werden die Angriffspunkte a und b (Fig. 27.) der beiden einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte durch diese Kräfte zu einer größeren Entfernung von einander aufgefordert, wie der Fall ist, wenn die in a wirkende diese Stelle von a nach c und die in b wirkende die Stelle b von b nach d hin in Bewegung setzen will, und denkt man sich die Bedingungen des Gleichgewichts in der Art nur ein wenig gestört, daß die beiden Kräfte zwar einander gleich und ihre Richtungen einander gerade entgegengesetzt, aber nicht mehr in einer und derselben Geraden liegen bleiben, wie in Fig. 27. durch die punktirten Linien angedeutet worden ist, von denen die a'c' der ac, die b'd' der bd parallel läuft, so läßt sich mittelst des Parallelogramms der Kräfte die a'c' in zwei andere a'f und a'g zerlegen, von denen die a'f in der Verlängerung von a'b' von a' nach f zu wirkt, die andere in der darauf senkrechten Richtung von a' nach g hin, und ebenso lassen sich für die Kraft b'd' zwei andere b'h und b'k substituiren, von denen die b'h in der Verlängerung von a'b' von b' nach h, die andere in der darauf senkrechten Richtung von b' nach k hin wirkt. Da nach unserer Voraussetzung die Diagonalen a'c' und b'd', wodurch die beiden Kräfte vorgestellt werden, einander gleich und parallel sind, da ferner unserer Construktion gemäß die Linien a'f und b'h sowohl als die a'g und b'k einander parallel laufen, so müssen die Rechtecke a'fc'g und b'hd'k unter sich congruent, demnach a'f = b'h und a'g = b'k werden; es liegen aber die Richtungen der beiden gleichen Kräfte a'f und b'h in einer und derselben Geraden und sind einander gerade entgegengesetzt, weßhalb diese Kräfte unter sich im Gleichgewichte sind, und die gleichen Kräfte a'g und b'k haben zwar auch einander gerade entgegengesetzte Richtungen, die aber nicht in einer und derselben Geraden liegen; sie bilden also einen Drehzwilling, durch welchen die a'b' in die Lage ab zurückgeführt wird. Aus diesem Allem läßt sich schließen, daß der Körper, dessen Gleichgewichtslage durch eine kleine Verrückung gestört worden ist, pendelartige Schwingungen um dieselbe macht, die ihn zuletzt in die alte Gleichgewichtslage zurückbringen. Wir nennen ein Gleichgewicht von der hier beschriebenen Art ein haltbares oder stabiles.

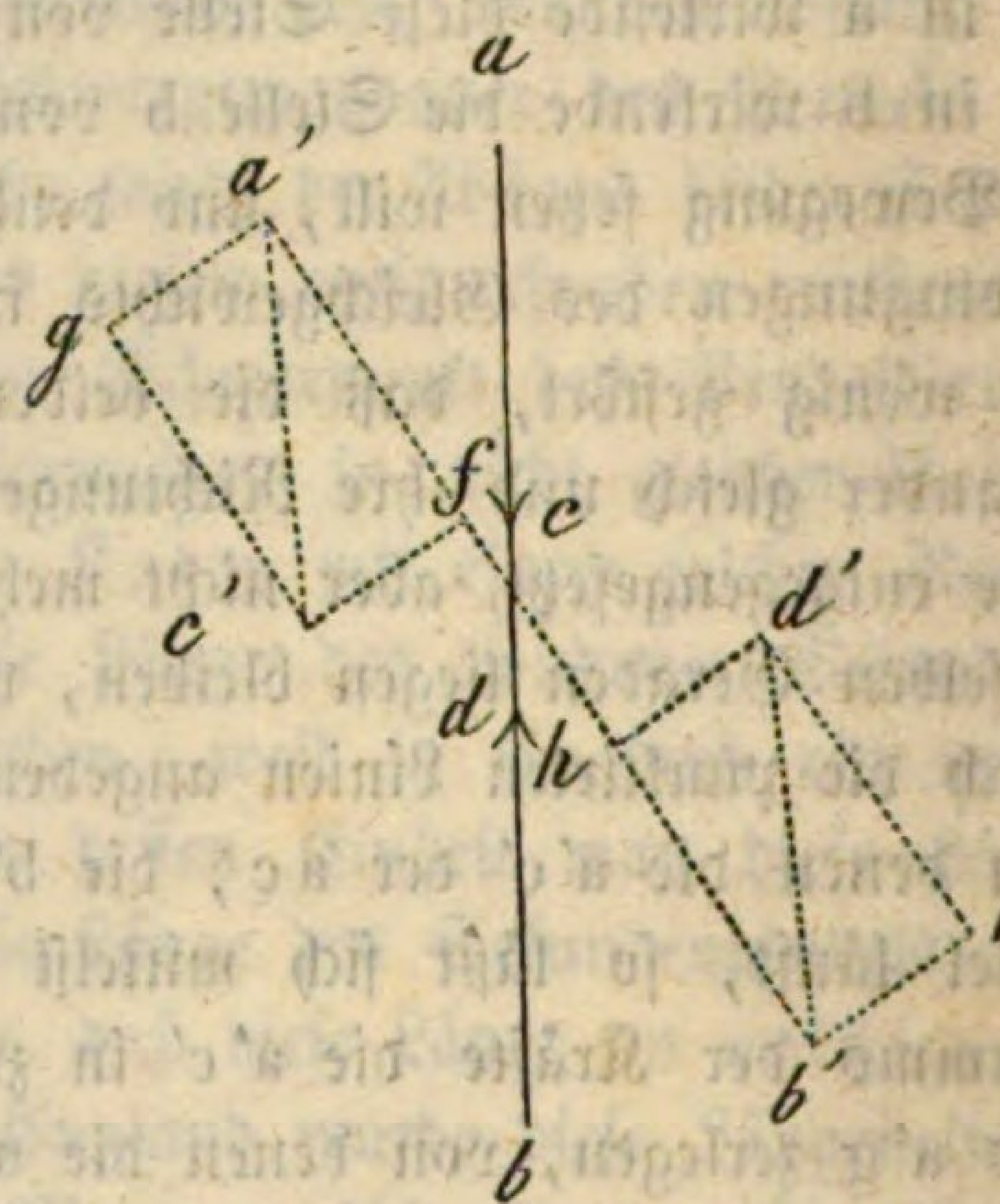
Fig. 27.



II. Werden aber die Angriffspunkte a und b durch die beiden einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte einander näher zu bringen gesucht, wie umstehend in Fig. 28., wenn der Angriffspunkt a durch die hier einwirkende Kraft von a nach c, der b von b nach d hin angetrieben wird, und wird der feste Körper ein wenig aus seiner Lage gerückt, wie in der Figur durch

die punktirten Linien angedeutet ist, während die Kräfte a'c' und b'd' einerlei Größe und gleichläufige parallele Richtungen mit denen ac und bd behalten, so läßt sich mittelst des Parallelogramms der Kräfte die a'c' in zwei andere a'f und a'g zerlegen, von welchen die a'f von a' nach b' hin gerichtet ist, die a'g hingegen senkrecht darauf die Stelle von a' nach g hin treibt, und eben so läßt sich die b'd' in die zwei Kräfte b'h und b'k auflösen, von denen die b'h von b' nach a' hin gerichtet ist und die b'k senkrecht darauf von b' nach k hinwirkt. Weil die Diagonalen a'c' und b'd' gleich und parallel sind, und sowohl die Geraden a'f und b'h als die a'g und b'k mit einander parallel laufen, so werden die Rechtecke a'fc'g und b'hd'k congruent und in Folge a'f = b'h, folglich halten die beiden Kräfte a'f und b'h einander das Gleichgewicht, und die beiden andern gleichen Kräfte a'g und b'k bilden einen Drehzwilling, wodurch der feste Körper noch weiter von seiner vorigen Gleichgewichtslage abgelenkt wird. In diesem Falle, wo der Körper das Bestreben hat, sich immer weiter von der Gleichgewichtslage zu entfernen, aus der er um sehr wenig gerückt worden ist, nennt man sein Gleichgewicht ein unhaltbares oder labiles. Der feste Körper, welcher aus einem unhaltbaren Gleichgewichtszustande nur im Mindesten gerückt worden ist, geht von selber einem haltbaren Gleichgewichtszustande zu, und erreicht ihn auch, wenn ihn nicht äußere Umstände zwangsweise davon abhalten.

Fig. 28.



III. In dem besondern Falle, wo die beiden Angriffspunkte a und b in einer und derselben Stelle zusammenfallen, fallen die einander gerade entgegengesetzten Richtungen a'c' und b'd' stets in dieselbe gerade Linie, was auch der festeste Körper für eine Stellung zu diesen Richtungen annehmen mag; daher findet hier das Gleichgewicht bei allen möglichen Stellungen des Körpers statt. Diese Art des Gleichgewichts pflegt man das richtungslose oder indifferente zu nennen; es bildet die Grenze zwischen haltbarem und unhaltbarem Gleichgewicht.

Wenden wir diese dreierlei Zustände des Gleichgewichts im festen Körper auf das Gewicht desselben an, und nennen wir Unterstützungspunkt des Körpers die Stelle, auf welche die dem Gewichte das Gleichgewicht haltende Kraft einwirkt, so tritt uns sogleich entgegen, daß das Gewicht eines festen Körpers in einem indifferenten oder richtungslosen Gleichgewicht sich befindet, wenn der Unterstützungspunkt in dessen Schwerpunkt liegt; in einem haltbaren hin-

gegen, wenn der Unterstützungspunkt lothrecht ober dem Schwerpunkt liegt; endlich in einem unhaltbaren, wenn der Unterstützungspunkt lothrecht unter dem Schwerpunkt liegt. Will in letzterem Falle der Körper aus seiner Gleichgewichtslage heraustreten und umstürzen, so kann man ihn dadurch davon abhalten, daß man den Unterstützungspunkt immer wieder lothrecht unter den Schwerpunkt zu bringen sucht, was man das Balanciren der gewichtigen Körper nennt. Ein Körper, der in einem unhaltbaren Gleichgewichte sich befindet, kann dadurch in ein haltbares Gleichgewicht gebracht werden, daß man andere gewichtige Massen so mit ihm fest vereinigt, daß der Schwerpunkt des Ganzen unterhalb des Unterstützungspunktes zu liegen kommt.

Wenn ein gewichtiger Körper auf einer horizontalen Basis ruht, oder in mehreren Punkten eine horizontale Unterlage berührt, so ist er vor dem Fallen gesichert, wenn dessen Schwerlinie, d. h. die durch seinen Schwerpunkt hindurch gehende lothrechte Richtung die Basis innerhalb der äußern Umgrenzung der Berührungspunkte trifft; denn dann können sich immer an den Berührungsstellen Widerstände geltend machen, deren Richtungen mit der lothrechten parallel laufen, deren Mittelkraft dem Gewicht des Körpers gleich ist, und eine Richtung hat, die durch seinen Schwerpunkt geht und der des Gewichtes gerade entgegengesetzt ist. Es fordert beim Menschen einige Kunstfertigkeit, seinen Schwerpunkt immer lothrecht über der durch seine Füße gegebenen Basis zu erhalten und so vor dem Umfallen sich zu schützen, wovon die langwierigen Bemühungen des Kindes, gehen und stehen zu lernen, den besten Beweis liefern. In dem oft unbewußten Bestreben, den Schwerpunkt des Ganzen lothrecht über die Sicherheit gewährende Basis zu bringen, liegt der Grund, warum eine Person, an deren rechtem Arme eine Last hängt, ihren Oberleib nach der linken Seite neigt, und nach der rechten, wenn die Last an ihrem linken Arme hängt; warum ein Mann, der auf seinem Rücken eine Bürde trägt, seinen Oberleib nach vorn hin neigt, und nach hinten hin, wenn er die Bürde, wie z. B. der Schläger der großen Trommel, vor sich her trägt. Von der Lage des Schwerpunkts in dem Körper hängt es ab, wenn ein Cylinder eine schiefe Ebene hinan, oder ein Doppelkegel auf seinen beiden Gleisen in die Höhe sich zu bewegen scheint. In beiden Fällen ist das Ansteigen des Körpers ein blos scheinbares, sein Schwerpunkt sinkt dabei jederzeit.

§. 29. Von der Wage.

Wir haben bereits im Pendel eines der empfindlichsten und darum werthvollsten Werkzeuge in der Hand des Naturforschers kennen gelernt, womit sich die Aenderungen der Schwere an verschiedenen Orten unserer Erde mit einer bewundernswerthen Genauigkeit entdecken ließen; wir werden jetzt ein eben so empfindliches und nicht minder werthvolles Instrument, die Wage,

kennen lernen, womit sich die Gewichte verschiedener Körper an demselben Orte unserer Erde unter einander vergleichen und die geringsten Differenzen derselben erkennen lassen. Die Wage wird zwar auch im bürgerlichen Leben zur Bestimmung des Gewichts der Körper benützt; von den Erfordernissen solcher Wagen aber wird hier so wenig die Rede sein, wie von denen des Physikers oder Chemikers, die blos solche bürgerliche Zwecke zu erfüllen bestimmt sind. Es sollen an dieser Stelle die Bedingungen einer Wage aufgesucht werden, welche das Gewicht eines Körpers mit aller möglichen Genauigkeit anzugeben im Stande ist.

Vor allem ist dazu erforderlich, daß die Stellen, womit der Wagbalken auf seiner Unterlage ruht, so wie die, an welchen die Wagschalen den Wagbalken angreifen, möglichst scharf begrenzt und leicht beweglich seien. Diese beiden Zwecke erreicht man gleichzeitig am besten dadurch, daß man in der Mitte und an den beiden Enden des Wagbalkens prismatisch geformte Theile Theile von gehärtetem Stahl befestigt, von welchen der mittlere nach unten zu, die beiden äußern nach oben zu mittelst seiner beiden Seitenflächen, die circa einen rechten Winkel unter sich einschließen, zu einer völlig geraden und glatten Schneide ausgearbeitet sind. Diese Schneiden sollen den Wagbalken in möglichst parallelen Richtungen durchdringen, und auf dessen Seitenflächen senkrecht stehen. Die mittlere ist beim Gebrauch der Wage dazu bestimmt, den Wagbalken auf einer horizontalen, ebenen und glatten Unterlage, gewöhnlich Platten aus Achat oder Feuerstein, ruhen zu lassen, auf die äußern werden eben soche Platten aufgelegt, die in metallenen Gehäusen befestigt sind, woran die Wagschalen hängen, in solcher Art, daß sie in der Ruhe möglichst horizontale Ebenen bilden, weßhalb auch dafür Sorge getroffen wird, daß sie bei jedem wiederholten Gebrauche der Wage immer wieder in der gleichen Weise auf ihre Schneiden zu liegen kommen. Vermöge dieser Schneiden werden die angegriffenen Stellen des Wagbalkens gleichsam zu mathematischen Punkten und deren Glätte macht den Wagbalken an den harten und glatten Steinplatten äußerst leicht beweglich. Ich habe eine von dem verstorbenen Prof. Engelhart aus Berzelius Laboratorium mitgebrachte Wage, deren mittlere Schneide auf Achatplatten ruhte, deren Wagschalen aber nur mittelst stählerner Hacken an den äußern Schneiden hingen, auf die hier angezeigte, von Berzelius selbst in seinen „chemischen Operationen und Geräthschaften" beschriebene Weise abgeändert und dabei gefunden, daß dieselbe nach der Abänderung über hundertmal empfindlicher wurde, als zuvor. Ihre mittlere Schneide, welche stark abgerundet war, war aber allerdings von mir in eine scharfkantige umgewandelt worden.

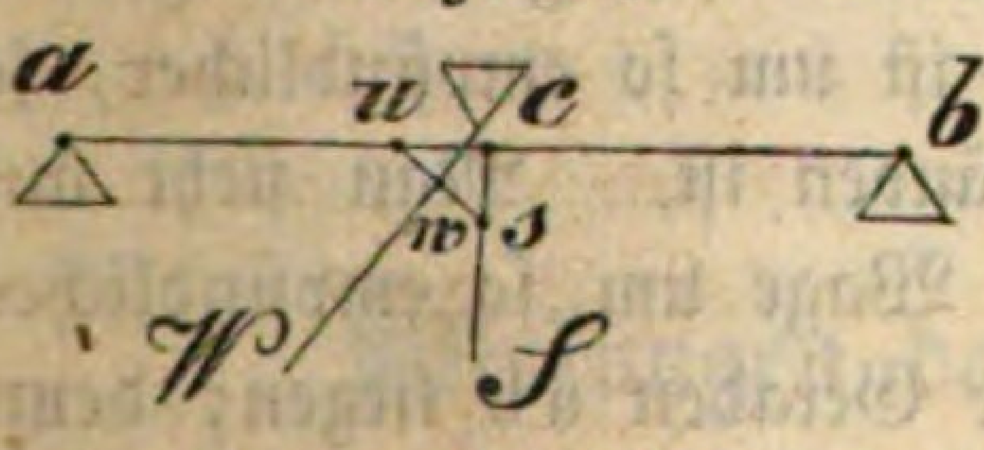
Beim Einsetzen der Schneiden hat man darauf zu sehen, daß sie möglichst genau in einer Ebene liegen. Diese Bedingung ist für die Empfindlichkeit der Wage von der größten Wichtigkeit, wie wir sogleich sehen werden; man

thut daher wohl, die mittlere Schneide um's Merken unterhalb der äußern anzubringen, wobei die Wage bei starker Belastung umschlägt, und sie dann durch langsames Abarbeiten in die Höhe zu heben, bis die Wage bei starker Belastung eben nicht mehr umschlägt.*)

Erst nachdem diese Stellung der drei Schneiden gegen einander mit aller Sorgfalt herbeigeführt worden ist, geht man an die letzte Ausarbeitung des Wagbalkens — dafür Sorge tragend, daß sein Schwerpunkt nur äußerst wenig unter der mittleren Schneide liege, zu welchem Zwecke ohnehin gewöhnlich noch besondere Vorkehrungen an der Wage angebracht sind; — giebt man auf diese zwei Bedingungen gehörig Acht, so kann man bei übrigens guter Bearbeitung der einzelnen Theile sicher sein, eine zu den zartesten Abwägungen brauchbare Wage zu erhalten, selbst wenn sie die Bestimmung hat, Gewichte von mehreren Pfunden mit einander zu vergleichen. Es kann zwar nach dem letzten Handanlegen an den Wagbalken, wobei in keinem Falle große Aenderungen an ihm mehr vorfallen, die Wage bei sehr großen Belastungen noch eben umschlagen, allein dieß bringt eher Vortheil als Nachtheil, wenn man während des Erhöhens der mittleren Schneide in die Wagschalen die größten Gewichte gelegt hat, welche die Wage zu tragen bestimmt ist; denn dann hält dieser Umstand von einem Ueberbürden der Wage ab, und verleiht ihr zudem noch andere schätzbare Eigenschaften, von denen zu reden hier nicht der Ort ist.

Um einzusehen, daß in der That die Brauchbarkeit der Wage fast ausschließlich von der Vollkommenheit abhängt, womit die obigen zwei Bedingungen an ihr erfüllt worden sind, sollen (Fig. 29.) a und b die äußern Schneiden einer Wage vorstellen, c die mittlere, welche nur äußerst wenig außerhalb der von a nach b gezogenen Geraden liegt. Wirken nun auf die Stellen a und b zwei Gewichte P und Q ein, so bringen diese beiden Kräfte eine in lothrechter Richtung wirkende Mittelkraft zu Stande, deren Sitz bei jeder Lage des Wagbalkens in dem Punkte x der Geraden a b angenommen werden kann, der die Eigenschaft besitzt, daß

Fig. 29.



---

*) Bei der Wage, von der ich soeben sprach, trat die mittlere Schneide zu beiden Seiten aus einem stärkeren Körper hervor, mittelst welchem sie in den Wagbalken eingeschlagen wurde, und mir war bange, daß sie bei der oben angegebenen Operation ihre gerade Richtung verlieren möchte; diesem Uebelstande begegnete ich dadurch, daß ich zwei Streifen Spiegelglas in solcher Entfernung auf eine starke metallene Unterlage aufkittete, daß der oben genannte stärkere Körper sich dazwischen bequem bewegen konnte.

Die Oberfläche dieser Glasstreifen machte ich mittelst zweier andern Platten auf die bekannte Weise vollkommen eben und erhielt sie während der Abarbeitung dieser Schneide auf ihr stets in dem gleichen Zustande.

$$P . a x = Q . b x$$

ist, den Eigenschaften der parallelen Kräfte gemäß. Befindet sich dieser Punkt x bei horizontaler Lage des Wagbalkens in der durch c gehenden lothrechten Richtung, so wird der Wagbalken bei dieser Lage im Gleichgewicht sein, wenn sein Schwerpunkt s ebenfalls in dieser lothrechten Richtung liegt, weil sich dann diese beiden Kräfte in eine einzige mit lothrechter Richtung zusammensetzen, die durch den Punkt c hindurch geht. Dieses Gleichgewicht wird ein haltbares sein, dem gemäß die Zunge der Wage einspielt, so oft die Punkte x und s, wenn auch noch so wenig unterhalb des Punktes c liegen. Wird nun eines der beiden Gewichte z. B. P um p vermehrt, so kann man die Mittelkraft der beiden Kräfte P + p und Q unter allen Umständen als in einem andern Punkte u zwischen c S und a wirksam sich vorstellen, der die Eigenschaft besitzt, daß

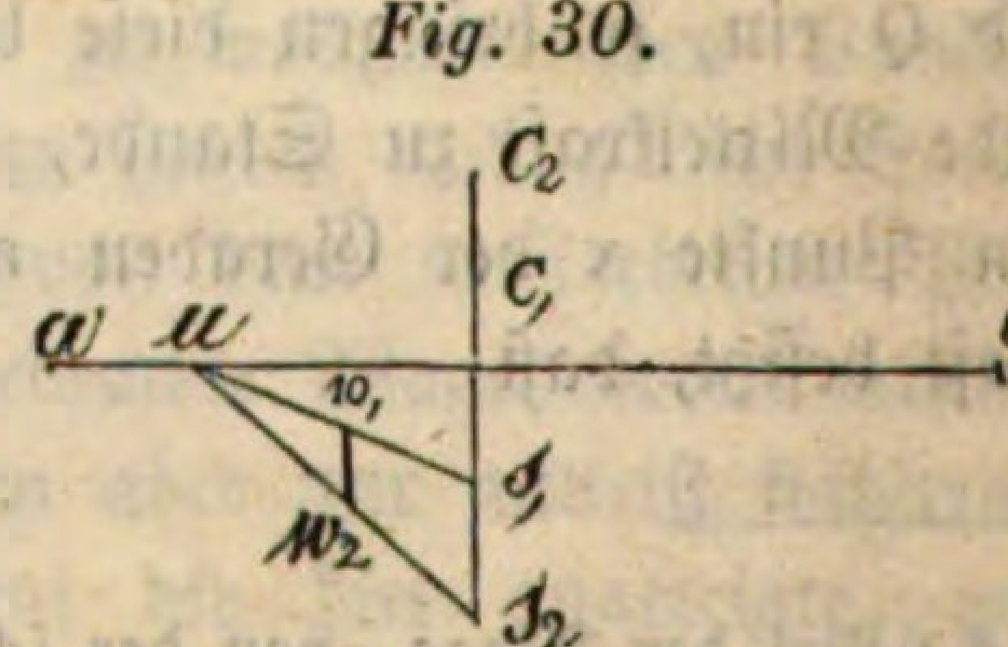
$$(p + P) a u = Q . b u$$

ist; man kann sich also jetzt auf den Wagbalken zwei lothrechte Kräfte einwirkend vorstellen, eine in u von der Größe p + P + Q und eine in s, deren Größe das Gewicht G des Wagbalkens selber ist. Diese beiden Kräfte setzen sich ihrerseits in eine einzige zusammen, deren Sitz in einem Punkte w der Geraden u s von der Beschaffenheit ist, daß

$$(p + P + Q) u w = G . s w$$

wird, und in Folge dieser einen Kraft muß sich der Wagbalken um seine mittlere Schneide drehen, bis die Richtung c w in die lothrechte Lage c S gekommen ist; es gibt sonach der Winkel w c S den Ausschlag der Wage bei dem Uebergewicht p zu erkennen, und die Wage ist um so empfindlicher, je größer dieser Winkel unter übrigens gleichen Umständen ist. Man sieht auf diese Weise so zu sagen mit Augen ein, daß die Wage um so empfindlicher sein wird, je näher die Punkte s und c an der Geraden a b liegen; denn stellen Fig. 30. s_1 und s_2 zwei Lagen des Schwerpunkts bei gleichem Gewichte des Wagbalkens vor, beide in einer auf a b senkrechten Geraden liegend, und w_1 und w_2 die Angriffspunkte der diesen beiden Lagen entsprechenden Mittelkraft, so ist dem eben Gesagten zur Folge

Fig. 30.



$$(p + P + Q) u w_1 = G . s_1 w_1 \text{ und } (p + P + Q) u w_2 = G . s_2 w_2 ,$$

woraus folgt:

$$u w_1 : u w_2 = w_1 s_1 : w_2 s_2 ;$$

dann aber wird nothwendiger Weise $s_2 c_1 w_2 < s_1 c_1 w_1$, so wie s_2 weiter von der Geraden a b abliegt als s_1, und jeder dieser beiden Winkel wird kleiner als zuvor, sowie der Punkt c_1 eine von a b entferntere Stelle c_2 in der Geraden einnimmt, worin die Punkte c_1, s_1 und s_2 liegen. Es wird zwar

der Winkel Scw (Fig. 29.) auch kleiner, je mehr w gegen s zu rückt, d. h. je größer das Gewicht des Wagbalkens in Vergleich zu dessen Belastung ist; doch trägt dies nur in einer untergeordneten Weise zur Unempfindlichkeit einer Wage bei, und gibt zu verstehen, daß man dem Wagbalken nicht ohne Noth ein großes Gewicht geben soll. Analoges gilt von der Kürze des Balkens, wodurch der Punkt u einen geringeren Abstand von dem Unterstützungspunkte c erhält.

Allerdings werden im Gleichgewichte die Gewichte P und Q nur dann einander völlig gleich sein, wenn die Mitte zwischen a und b genau in der durch c auf a b senkrecht gezogenen Geraden liegt. Auch sucht man diesen Umstand so gut als möglich herbei zu führen; man darf ihm jedoch keine der zur größten Empfindlichkeit der Wage erforderlichen zwei Hauptbedingungen opfern, weil man mit einer Wage, deren beide Arme nicht völlig gleich lang sind, doch noch genau wägen kann, wenn sie nur empfindlich genug ist. Man darf zu diesem Ende nur den zu wägenden Körper an ihr mit irgend andern Gewichten in's Gleichgewicht setzen, ihn dann aus seiner Wagschale herausnehmen, und genaue Gewichte in diese legen bis wieder das Gleichgewicht statt hat, dann geben diese das genaue Gewicht von jenem Körper an. In Frankreich ist das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers bei seiner größten Dichtigkeit zur Einheit genommen und Gramme genannt worden.

Kapitel VI.

Wirkungen der Schwere in flüssigen Körpern.

---

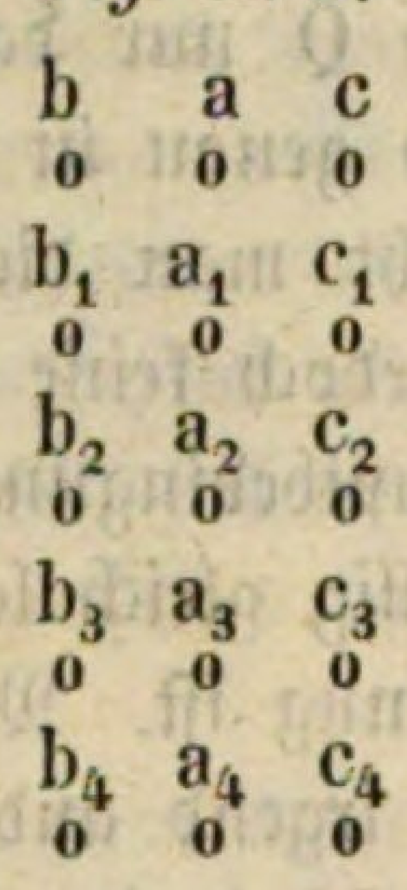
§. 30. Uebertragungsweise des Gewichtes der Flüssigkeitstheilchen auf einander. Beschaffenheit der Oberfläche von Flüssigkeiten.

Das Prinzip der gleichen Fortpflanzung eines auf ein Flüssigkeitstheilchen ausgeübten Drucks nach allen Richtungen hin (siehe §. 22.), verbunden mit der Art und Weise wie sich das Gewicht eines Theilchens auf andere Theilchen überträgt, giebt das ganze Verhalten der schweren Flüssigkeiten her, weßwegen wir hier vorzugsweise die Uebertragungsweise des Gewichts von Theilchen zu Theilchen zu untersuchen haben; weil aber hierbei die Anordnungsweise der Theilchen einer Flüssigkeit unter einander eines der wesentlichsten Elemente hergiebt, so wird es nöthig, den Hergang unter Voraussetzung verschiedener solcher Anordnungsweisen zu verfolgen. Dabei werden wir jedoch nur solche Anordnungsweisen zulassen, welche eine homogene d. h. eine an

allen Stellen ihrem innern Baue nach gleichbeschaffene Flüssigkeit zu liefern vermögen.

I. Denken wir uns erstlich den Bau der Flüssigkeit so, daß unter jedem in ihrer Oberfläche befindlichen Theilchen nur in lothrechter Richtung andere Theilchen der Flüssigkeit vorhanden sind, welche gleich weit von einander abstehen, und stellt $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ in nebenstehender Fig. 31 a. eine solche lothrechte Reihe unter einander liegender Theilchen vor, so will sich das Theilchen a vermöge seines Gewichtes gerade gegen das Theilchen a_1 hinbewegen nnd würde mit diesem in Berührung kommen, wenn sich nicht Molecularkäfte entwickelten, die eine weitere Annäherung des Theilchen a an das a_1 unmöglich machen; eine Kraft aber die das Theilchen a von seiner Bewegung zurückhalten will, muß an Größe dem Gewichte dieses Theilchens gleich sein, ihre Richtung muß in der lothrechten Richtung liegen, in der die Theilchen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ vertheilt sind, aber der des Gewichts von a gerade entgegengesetzt sein. Bedenkt man nun, daß es stets erlaubt ist, sich in dem Theilchen a_1 zwei an Größe gleiche und der Richtung nach gerade entgegengesetzte Kräfte wirksam zu denken, und nimmt man deren Größe dem Gewicht von a gleich an, so wie die Richtung der einen lothrecht von unten nach oben, die der andern lothrecht von oben nach unten, so hält erstere dem Gewicht von a das Gleichgewicht, während letztere das Gewicht von a in das Theilchen a_1 verlegt, zu dem sich noch das Gewicht des Theilchen a_1 selber gesellt, so daß dann dieses letztgenannte Theilchen mit einer Kraft von oben nach unten getrieben wird, die das Doppelte von dem Gewichte eines Theilchens ist, wenn wir alle Flüssigkeits-Theilchen von gleichem Gewichte annehmen. Ganz auf die gleiche Weise läßt sich zeigen, daß in dem Theilchen a_2 eine Kraft in lothrechter Richtung von oben nach unten sich erzeugt, welche das Dreifache von dem Gewichte eines Theilchens ist, und so fortfahrend gelangt man zu dem allgemeinen Satze, daß jedes in der hervorgehobenen lothrechten Richtung liegende Theilchen eine von oben nach unten gerichtete Kraft in sich aufnimmt, welche dem Gewicht aller in derselben Richtung bis zu ihm inclusive hin liegenden Theile gleich kommt. Dabei ist es für den Erfolg völlig gleichgültig, ob man sich das Gewicht des Theilchens a ganz allein an dem Theilchen a_1 oder gleichzeitig an mehreren solchen Theilchen abstumpfen lassen will, wenn man nur unter allen Umständen eine symmetrische Anordnung und Wirkungsweise der Theilchen voraussetzt; denn wollte man annehmen, das Gewicht des Theilchens a wirkt nur mit einem Theile auf das Theilchen a_1 direkte ein, mit dem andern aber gleichzeitig auf die Theilchen b_1 und c_1, so müßte auch das Theilchen c die gleiche Seitenkraft auf das Theilchen a_1 hinschicken, wie das Theilchen a auf das Theilchen b_1, und b müßte auf das

Fig. 31 a.



Theilchen a_1 die gleiche Kraft ihrer Größe und Richtung nach hinwerfen, wie das Theilchen a auf das Theilchen c_1, so daß im Theilchen a_1 doch wieder dieselben Seitenkräfte wirksam würden wie im Theilchen a, weßhalb im Theilchen a_1 sich wieder die gleiche Mittelkraft bilden müßte, wie im Theilchen a.

II. Nehmen wir nun zweitens an, daß die Flüssigkeitstheilchen zwar in parallelen und gleichweit von einander abstehenden lothrechten Ebenen vertheilt seien, aber in diesen Ebenen nicht lothrecht untereinander, jedoch so liegen, daß sie die Durchschnittspunkte zweier Reihen paralleler und gleichweit von einander abstehender Geraden bilden, wie in der nebenstehenden Fig. 31 b. abgebildet ist, und nimmt man an, daß das Gewicht von a sich in die Theilchen a_1 und c_1 überträgt, so würde sich dann auch das Gewicht von b an die Theilchen b_1 und a_1 übertragen u. s. f. und dabei müßten alle parallelen Seitenkräfte unter einander gleich sein, es wirkten also auf das Theilchen a_1 die von a und b herkommenden Seitenkräfte, welche ihrer Größe und Richtung nach denen gleich wären, in welche sich das Gewicht des Theilchens a zerlegen müßte, um direkt auf die Theilchen a_1 und c_1 einwirken zu können, folglich setzen sich diese im Theilchen a_1 wieder zu dem Gewichte des Theilchens a zusammen. Auf die gleiche Weise fortfahrend gelangt man zu dem Resultate, daß jedes in einer tiefern Schicht liegende Theilchen durch eine lothrecht von oben nach unten wirkende Kraft angetrieben wird, deren Größe das Gewicht von je einem Theilchen aus dieser und allen darüber liegenden Schichten in sich begreift, und auch hier würde das Resultat das gleiche bleiben, wenn man annehmen wollte, daß sich die Kraft eines jeden Theilchens nicht blos über zwei, sondern über beliebig viele Theilchen der folgenden Schicht verbreitet, bei allen jedoch in der gleichen Weise.

Fig. 31 b.

	d_0		b_0		a_0		c_0		e_0
d_1 o		b_1 o		a_1 o		c_1 o		e_1 o	
	d_2 o		b_2 o		a_2 o		c_2 o		e_2 o

III. Nehmen wir endlich an, daß die Flüssigkeits-Theilchen weder in lothrechten Geraden noch in lothrechten Ebenen aber doch so vertheilt seien, daß sie in den Schnittpunkten dreier Reihen paralleler und gleichweit von einander abstehender Ebenen liegen, was die Homogenität der Flüssigkeit zu verlangen scheint, und denkt man sich das Theilchen einer jeden Schicht mit seinem Gewichte auf die drei ihm zunächst liegenden Theilchen der unmittelbar tiefer liegenden Schicht einwirkend, so muß man dieses Gewicht mittelst des Parallelepipeds der Kräfte in drei Seitenkräfte zerlegen, wobei sich auf ganz analoge Weise wie in II. herausstellen wird, daß jedes in einer tiefern Schicht liegende Theilchen in lothrechter Richtung von oben nach unten durch eine Kraft getrieben wird, deren Größe die Summe der Gewichte von je einem Theilchen aus dieser und allen darüber liegenden Schichten ist, und auch hier kann man sich leicht überzeugen, daß der Erfolg der gleiche bleibt, wenn man die Ein-

wirkung eines Theilchens statt auf drei, auf beliebig viele Theilchen der folgenden Schicht sich erstrecken lassen wollte.

Aus dieser Uebertragungsweise der vom Gewichte herstammenden Kräfte der Flüssigkeitstheilchen an die zunächst unter ihnen liegenden, die man ohne Zweifel als allen homogenen Flüssigkeiten eigenthümlich anzusehen berechtigt ist, gehen nun mehrere in Bezug auf das innere Verhalten von Flüssigkeiten sehr wichtige Folgerungen hervor. — Denkt man sich erstlich durch alle an der Oberfläche einer Flüssigkeit liegenden Theilchen innerhalb einer sehr kleinen Strecke, die man stets als eben anzusehen berechtigt ist, Gerade gezogen, welche einer von den Richtungen, worin sämmtliche Flüssigkeitstheilchen liegen, parallel laufen, so werden in diesen in's Innere der Flüssigkeit hinein laufenden Geraden in gleichen Abständen stets Flüssigkeitstheilchen von gleichem Gewichte liegen, wenn die Flüssigkeit homogen ist, so daß die Theilchen einer jeden folgenden Schicht immer in einer Ebene liegen werden, die mit der entsprechenden Strecke an der Oberfläche parallel läuft und dieser Strecke gleich ist. Faßt man eine dieser begrenzten Ebenen ins Auge, so wirkt jedes der in ihr und in den gezogenen Geraden liegende Theilchen mit einer Kraft lothrecht von oben nach unten, welche die Gewichte aller in derselben Geraden liegenden Theilchen bis zur Oberfläche hin in sich faßt, dem zuvor Gesagten gemäß.

Die Summe der in allen Theilchen von irgend einer so begrenzten Ebene lothrecht von oben nach unten wirkenden Kräfte ist folglich das Gewicht aller in den gezogenen Geraden zwischen ihr und der mit ihr parallelen Strecke an der Oberfläche liegenden Theilchen, die einen prismatischen Raum einnehmen, dessen Grundfläche die begrenzte Ebene selber, und dessen Höhe der senkrechte Abstand zwischen dieser Ebene und der ihr parallelen Strecke an der Oberfläche ist.

Verbinden wir zweitens diese lothrecht von oben nach unten thätigen Kräfte mit dem Satz der gleichen Fortpflanzung eines irgendwo in der Flüssigkeit ausgeübten Druckes nach allen Richtungen hin,*) so werden wir dadurch in den Stand gesetzt, aus der eben bestimmten Kraft, womit jedes Flüssigkeitstheilchen von oben nach unten in lothrechter Richtung getrieben wird, die Kraft zu entnehmen, womit es auf seine Umgebung in horizontaler Richtung einwirkt, beide sind nämlich einander völlig gleich unter übrigens gleichen Umständen, und dabei wirken die lothrechten und wagrechten Kräfte gänzlich unabhängig von einander.

---

*) Auch dieses Princip läßt sich als ein abgeleiteter Satz unter der von selbst verständlichen Voraussetzung darstellen, daß da, wo Flüssigkeitstheilchen einen Druck auf eine ebene Fläche ausüben, sie mit dieser Ebene parallele Schichten bilden, und die Richtung der in ihnen thätigen Mittelkraft senkrecht auf jener Ebene steht, falls die Flüssigkeit im Stande der Ruhe sich befindet.

Nehmen wir nun drittens an, daß die Oberfläche einer Flüssigkeit horizontal sei, und denken wir uns unterhalb derselben in der Flüssigkeit eine andere horizontale Ebene in den Theilchen der Flüssigkeit liegen, so üben diese sämmtlich einen und denselben Druck in lothrechter sowohl als wagrechter Richtung auf die sie zunächst umgebenden Theilchen aus, sie werden daher in horizontaler Richtung einander das Gleichgewicht halten, wenn die Molecularkräfte, womit diese Theilchen auf einander einwirken, diesem Drucke gleich und von gerade entgegengesetzter Richtung sind, wozu im Allgemeinen ein bestimmter Abstand der Theile von einander erforderlich ist. Was hier von den Theilchen einer horizontalen Schicht in Bezug auf deren Gleichgewichtszustand in dieser Richtung gesagt worden ist, das gilt in ähnlicher Weise auch von den Theilchen der auf einander folgenden Schichten in lothrechter; ihr Druck lothrecht von oben nach unten wird nämlich in der nächst tieferen Schicht um das Gewicht des in dieser Schicht liegenden Theilchens größer und pflanzt sich dem Principe gemäß eben sowohl lothrecht nach oben, wie nach unten hin fort, wird aber nach oben hin um so viel kleiner, als sich das Gewicht des Theilchens ihm entgegensetzt.

Diesemnach drücken die Theilchen der beiden Schichten mit gleicher Stärke gegen einander und werden sich im Gleichgewichte erhalten, wenn ihr gegenseitiger Abstand der ist, wobei die Molecularkräfte in gleicher Stärke und mit gerade entgegengesetzten Richtungen thätig werden.

Die ganze Flüssigkeit **kann** also bei horizontaler Oberfläche zur Ruhe gelangen, umgekehrt aber muß die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit eine horizontale Lage haben. Die Annahme einer ruhenden Flüssigkeit mit nicht horizontaler Oberfläche nämlich hätte sowohl in horizontaler wie in lothrechter Richtung eine Ungleichheit des Drucks von zunächst bei einander liegenden Theilchen zur Folge, wobei ein Gleichgewicht dieser Theile selbst unter Mitwirkung von Molecularkräften sich nicht bilden könnte, indem diese immer nur paarweise von gleicher Größe und gerade entgegengesetzten Richtungen auftreten können. **Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit bildet demnach immer eine horizontale Ebene**, und dieser Satz ändert sich nicht, wenn auf alle Stellen der freien Oberfläche einer Flüssigkeit ein Druck von gleicher Stärke wirkt. So wird die Oberfläche einer jeden wasserförmigen Flüssigkeit horizontal, nachdem diese zur Ruhe gekommen ist, obgleich über ihr die ganze Atmosphäre liegt, und der Druck dieser letztern auf der Oberfläche von jener Flüssigkeit lastet. Aus dem gleichen Grunde müssen die sämmtlichen Oberflächen von über einander gelagerten, ungleich dichten und unvermischbaren Flüssigkeiten horizontale Ebenen bilden.

Allgemein genommen steht die Oberfläche einer Flüssigkeit an jeder Stelle immer senkrecht auf der Richtung, in welcher die Theilchen dieser Stelle durch die Mittelkraft der auf sie einwirkenden Kräfte zur Bewegung angetrieben

werden; daher denn auch die Oberflächen der unsere Erde umgebenden Meere eine der Kugelfläche sich annähernde Form annehmen. Verbindet sich die Schwerewirkung in den materiellen Theilchen einer Flüssigkeit noch mit andern Kräften, deren Richtungen beträchtlich von der lothrechten abweichen, so hängt die Lage ihrer Oberfläche an jeder Stelle von der Richtung der hier aus sämmtlichen Kräften hervorgehenden Mittelkraft ab, wodurch dann die Oberfläche einer Flüssigkeit an verschiedenen Stellen eine von der horizontalen sehr abweichende Lage annehmen kann. So ändert sich die zuvor horizontale Oberfläche einer in einem Glasgefäße befindlichen Flüssigkeit beträchtlich ab, wenn das Gefäß um eine lothrechte Axe in eine rasche Drehung versetzt wird, weil sich dann die horizontal wirkende Centrifugalkraft der Wassertheilchen mit derem Gewichte verbindet, und eine Mittelkraft entsteht, deren Richtung von der lothrechten beträchtlich verschieden ausfallen kann, indem die Centrifugalkraft im Wassertheilchen leicht größer werden kann, als die Schwerewirkung in demselben Theilchen, und da die Centrifugalkraft in verschiedenen Entfernungen des Theilchens von der Drehaxe nothwendig eine andere Größe annimmt, so zieht dieser Umstand eine von der Drehaxe aus allmählig sich abändernde Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche nach sich.

In ähnlicher Weise findet die Erhebung der Oberfläche von Wasser, das in einem gläsernen Gefäße enthalten ist, in der Nähe des Glases, und die Senkung der Oberfläche von Quecksilber unter den gleichen Umständen ihre Erklärung aus der an den Oberflächen der Flüssigkeiten sich geltend machenden Cohäsion und aus der am Glase auftretenden Adhäsion, die sich hier mit dem Gewicht der Flüssigkeitstheilchen zu einer Mittelkraft vereinigen, deren Richtung beträchtlich von der lothrechten abweicht.

§. 31. Vom Maaß des Druckes in wasserförmigen Flüssigkeiten.

Aus der Art, wie sich das Gewicht der oberen Flüssigkeitstheilchen als Druck auf die untern überträgt, folgt nun von selbst, daß eine horizontale unter einer Flüssigkeit befindliche feste Ebene von den über ihr liegenden Theilchen einen Druck erleidet, welcher dem Gewichte eines aus derselben Flüssigkeit gebildeten Prisma's gleich ist, das diese Ebene zur Grundfläche und zur Höhe den Abstand dieser Ebene von der Oberfläche der Flüssigkeit hat. Bezeichnet h den Abstand der horizontalen Ebene von der Oberfläche der Flüssigkeit in Längeneinheiten, F die Größe der Ebene in Flächeneinheiten und α das Gewicht der Cubikeinheit von der Flüssigkeit, so ist wenn D den Druck vorstellt, den die Ebene von oben her zu erleiden hat:

$$D = h F \alpha . \qquad (a.)$$

Wenn die Ebene F nicht mehr horizontal unter der Flüssigkeit liegt, sondern unter einem beliebigen Winkel gegen die Horizontalebene geneigt ist, so bestimmt sich der auf sie ausgeübte Druck nicht mehr so einfach wie zuvor, weil deren ungleich hoch liegende Stellen von gleicher Größe einen ungleich starken Druck erfahren. Untersucht man aber nach den Vorschriften der Statik den Gegenstand in einem solchen Falle genauer, so findet man, daß man auch jetzt noch der Formel (a) zur Berechnung des Druckes sich bedienen kann; nur darf man unter h nicht den Abstand der Ebene F von der Oberfläche der Flüssigkeit verstehen, was hier ohnehin keinen Sinn mehr gäbe, sondern man muß sich in einem solchen Falle die Ebene F mit gleichen Atomen gleichmäßig überzogen denken, dann und unter h den senkrechten Abstand ihres Schwerpunkts von der Oberfläche der Flüssigkeit verstehen. So aufgefaßt gilt die Formel (a) selbst noch in dem vorigen Falle, wo jeder Punkt der Ebene F, also auch ihr Schwerpunkt, denselben senkrechten Abstand von der Oberfläche der Flüssigkeit hat, wie die Ebene F selber.

Soll der Druck einer Flüssigkeit auf eine krumme Fläche aufgesucht werden, so wird die Sache noch verwickelter. Den Druck auf eine solche Fläche kann man in der Regel, wie schon bei Ebenen mit krummliniger Begrenzung in manchen Fällen, nur mit Beiziehung der Integralrechnung bestimmen; indessen kommen so entlegene Formen in der Anwendung nur sehr selten vor.

Liegt einmal eine horizontale Ebene F_1 in der Entfernung h_1 abwärts von der Oberfläche einer Flüssigkeit, von welcher die Cubikeinheit das Gewicht α_1 hat, und bezeichnet D_1 den Druck dieser Flüssigkeit auf die Ebene F_1; liegt ein andermal eine horizontale Ebene von der Größe F_2 in der Entfernung h_2 abwärts von der Oberfläche einer Flüssigkeit, von welcher die Cubikeinheit das Gewicht α_2 hat, und bezeichnet D_2 den Druck dieser Flüssigkeit auf die Ebene F_2, so ist nach Aussage der Gleichung (a):

$$D_1 = h_1\ F_1\ \alpha_1 \text{ und } D_2 = h_2\ F_2\ \alpha_2 ,$$

woraus sich ergiebt:

$$D_1 : D_2 = h_1\ F_1\ \alpha_1 : h_2\ F_2\ \alpha_2 . \qquad \text{(b.)}$$

Hat man es bei beiden Bestimmungen mit einer und derselben Flüssigkeit zu thun, so ist $\alpha_1 = \alpha_2$, und dann verwandelt sich die Proportion (b) in:

$$D_1 : D_2 = h_1\ F_1 : h_2\ F_2 ; \qquad \text{(c.)}$$

haben noch überdieß beide Ebenen einerlei Größe, so ist $F_1 = F_2$, und nun geht die Proportion (c) über in:

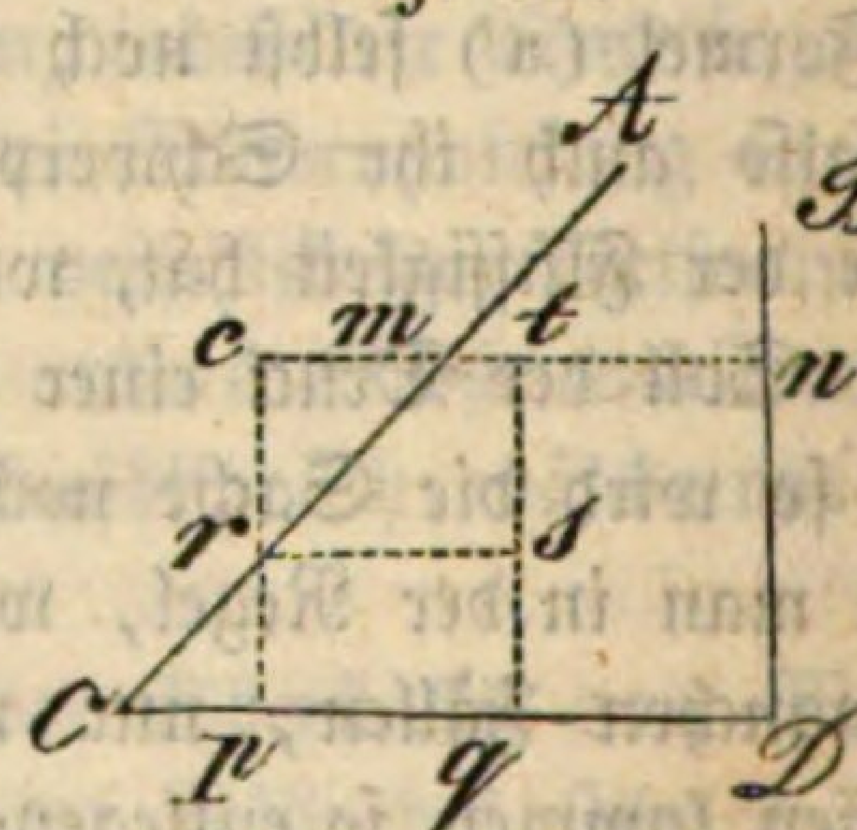
$$D_1 : D_2 = h_1 : h_2 \qquad \text{(d.)}$$

und dieß zeigt, daß man die Drucke einer Flüssigkeit auf horizontale Ebenen durch deren lothrechte Abstände von der Oberfläche der Flüssigkeit messen kann, wenn man sich stets derselben Flüssigkeit bedient und die Ebenen stets von einer und derselben Größe voraussetzt. Die Physiker bedienen sich dieses Mittels, verschiedene

Drucke von Flüssigkeiten unter einander zu vergleichen fast immer, weil es die größte Einfachheit der Bestimmung zugleich mit deren größter Genauigkeit in sich vereinigt. Auf solche Weise überzeugt man sich auch am leichtesten von der Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes.

Wir haben so eben gesehen, daß die Verfolgung des Druckes im Innern einer Flüssigkeit immer am einfachsten geschieht, wenn man denselben blos in lothrechter und wagrechter Richtung aufzufassen sich entschließt. Die Aenderungen des Drucks in jeder andern Richtung sind schwieriger anzugeben; eine solche Angabe ist aber unnöthig, da das Princip der gleichen Fortpflanzung des Drucks in allen Richtungen aussagt, daß der Druck an jeder Stelle in allen Richtungen der gleiche ist. Ist z. B. ACDB (Fig. 32.) der vertikale Durchschnitt eines Gefäßes, worin eine Flüssigkeit enthalten ist, deren horizontale Oberfläche bis mn reicht, und ist der Boden CD dieses Gefäßes ebenfalls horizontal, so kann man den senkrechten Druck eines bei p am Boden anliegenden Flüssigkeitstheilchens auf diesen leicht so auffinden. Zieht man pr in lothrechter Richtung bis diese Gerade die Wand AC im Punkte r schneidet, zieht man sodann von irgend einem Punkte t der Oberfläche die Lothrechte tq, welche den Boden in q trifft, endlich rs parallel mit pq, so sieht man sogleich, daß das Theilchen s vom Gewicht aller in der lothrechten Richtung st über ihm liegenden Theilchen gedrückt wird. Diesen Druck pflanzt es ohne alle Aenderung in der horizontalen Richtung rs bis r fort, so daß dieses an der Wand AC anliegende Theilchen r genau den gleichen Druck besitzt, den es hätte, wenn über ihm die Flüssigkeit in lothrechter Richtung bis an die Stelle c vorhanden wäre, in welcher die verlängerte Oberfläche mn von der verlängerten pr getroffen wird. Denselben Druck trägt es an alle es zunächst umgebenden Stellen über, in senkrechter Richtung gegen die Wand AC, in lothrechter Richtung rp an das zunächst unter ihm liegende Theilchen; in dieser letztern Richtung aber vermehrt er sich allmählig durch das Gewicht aller in rp enthaltenen Theilchen, welches dasselbe ist, wie das Gewicht aller in sq vorhandenen Theilchen. Es übt also das bei p am Boden anliegende Theilchen auf diesen in lothrechter Richtung denselben Druck aus, wie das bei q befindliche Flüssigkeitstheilchen, d. h. denselben, wie wenn die Wand AC gar nicht da wäre, und die Flüssigkeit über ihm bis c hin reichte. Dasselbe Resultat findet man auch bei jeder andern Lage der Seitenwände, woraus sich schließen läßt, daß **der Druck einer Flüssigkeit auf den horizontalen Boden eines Gefäßes, in welchem sie enthalten ist, sich blos nach der Größe dieses Bodens und der Höhe der Flüssigkeit im Gefäße richtet,**

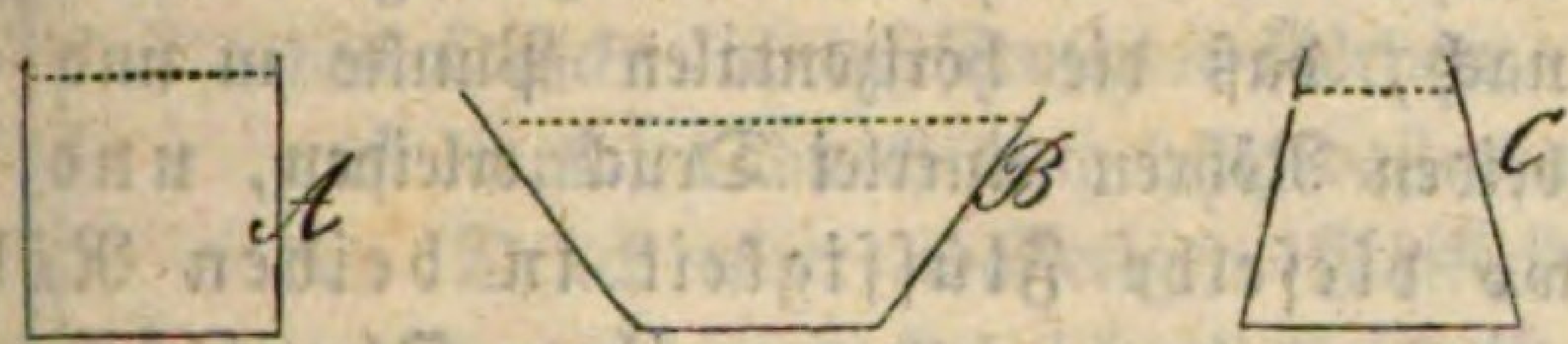
Fig. 32.



keineswegs aber irgend eine Aenderung durch die Gestalt der Seitenwände erleidet.

Der eben aus dem Principe der gleichen Fortpflanzung eines Drucks innerhalb einer Flüssigkeit nach allen Richtungen gefolgerte Satz scheint beim ersten Blick mit den Thatsachen im Widerspruch zu stehen. Nach ihm wäre der lothrechte Druck gegen den Boden in dreierlei Gefäßen A, B, C derselbe, wenn nur deren Böden gleich groß und horizontal sind, und die nämliche Flüssigkeit in jedem bis zu derselben Höhe ansteigt. Man könnte hieraus schließen wollen,

Fig. 33.



daß alle drei bei horizontaler Lage ihres Bodens an den einen Arm einer Wage gehängt, abgesehen von dem Gewichte der Gefäße, einerlei Wirkung auf den Wagbalken ausüben müssen, während doch die Erfahrung große Unterschiede hierin nachweist, und diese Wirkungen den Räumen der in den dreierlei Gefäßen enthaltenen Flüssigkeiten proportional zu erkennen giebt. Allein dieser Widerspruch ist ein blos scheinbarer, der seine Auflösung darin findet, daß der senkrechte Druck der Flüssigkeitstheilchen gegen die Seitenwände ganz in diese übergeht, und sich hier, wenn sich diese Wände wie in B nach oben hin erweitern, zerlegen läßt, in zwei Kräfte, von denen die eine das Gefäß lothrecht nach unten hin in Bewegung setzen will, die andere in einer wagrechten Richtung; durch jene wird der lothrechte Druck des Gefäßes nebst seines Inhaltes auf den Wagbalken vermehrt, durch letztere nicht geändert. Bei einem Gefäße wie C, dessen Seitenwände sich nach oben hin verengern, läßt sich der in diese Wände übergehende Druck zerlegen in zwei Kräfte, von denen die eine das Gefäß lothrecht nach oben hin in Bewegung setzen will, die andere in wagrechter Richtung; durch erstere wird die lothrechte Wirkung des Gefäßes sammt Inhalt auf den Wagbalken vermindert, durch letztere nicht geändert. Eine genaue Bestimmung dieser Kräfte führt leicht zu der Einsicht, daß sie genau den Gewinn oder Verlust am Gewicht der Flüssigkeit anzeigen, welche zur Seite von lothrecht gedachten Seitenwänden noch neben diesem im Gefäße liegt, oder darin fehlt. Auf solche Weise schließt sich jener Satz wieder vollkommen an die Erfahrung an.

Dieselben Betrachtungen, welche vorhin an der Fig. 32. durchgeführt worden sind, sind ganz eben so auch auf Röhren überzutragen, welche an ihren untern Enden durch Kanäle mit einander communiciren (communicirende Röhren). Jedes Theilchen einer solchen Röhre erleidet, was auch die Gestalt und Lage der Röhre sein mag, einen Druck, der dem Gewichte eines Fadens der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit entspricht, dessen Länge die senkrechte Entfernung der Stelle von der Oberfläche der Flüssigkeit in dieser Röhre ist. Denkt man sich nun

durch den Kanal zwischen zweien solchen Röhren hindurch die horizontale Gerade m o gezogen, so pflanzt das Theilchen m in der einen Röhre seinen Druck in der Richtung m o gegen die andere Röhre fort, so wie das Theilchen o in letzterer seinen Druck gegen m hin mit der ihm eigenthümlichen Stärke fortpflanzt. Wären nun diese beiden Drucke nicht gleich groß, so müßten alle Theilchen zwischen m und o sich nach der Seite des schwächern Drucks hin in Bewegung setzen, und die Flüssigkeit befände sich nicht im Stande der Ruhe. Der Ruhestand der Flüssigkeit verlangt sonach, daß die horizontalen Punkte m und o in beiden Röhren einerlei Druck erleiden, und dieß geschieht, im Falle, wo dieselbe Flüssigkeit in beiden Röhren vorhanden ist, offenbar nur dann, wenn ihre Oberflächen in beiden Röhren in einer und derselben Horizontalebene liegen; befinden sich aber in beiden Röhren Flüssigkeiten, deren Kubikeinheiten ungleiches Gewicht haben, so müssen die Längen der Fäden von beiden Flüssigkeiten im umgekehrten Verhältniß zu den Gewichten ihrer Kubikeinheiten, d. h. ihrer Dichtigkeiten, in Rechnung gebracht werden.

Fig. 34.

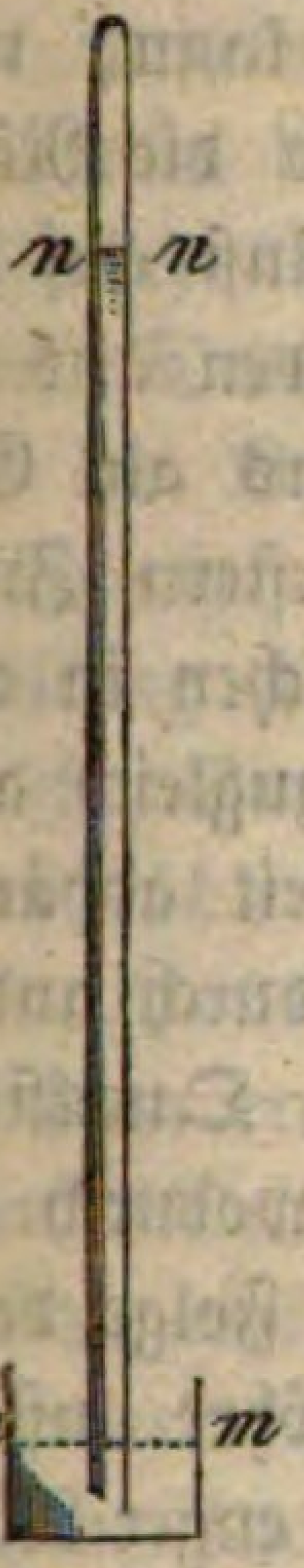


§. 32. Vom Maaß des Druckes in luftförmigen Flüssigkeiten.

Das Maaß des Druckes in luftförmigen Flüssigkeiten ist auf die im vorigen Paragraph angezeigte Weise nicht wohl zu erhalten, einmal weil dabei stets die freie Oberfläche der Flüssigkeit zu kennen nöthig wird, und diese weder bei Luft, welche in Gefäßen eingeschlossen ist, noch bei der Luft, die unsern Erdball umgiebt, erkennbar ist; sodann weil dem Mariotte'schen Gesetze zur Folge Luft an Stellen, wo sie einen größern Druck erleidet, sich in einen der Größe dieses Drucks umgekehrt proportionalen kleinern Raum zusammenzieht, wodurch das Gewicht von einer Raumeinheit Luft in verschiedenen Höhen einen sehr verschiedenen Werth erlangt, während bei einer wasserförmigen Flüssigkeit das Gewicht von einer mit ihr ausgefüllten Raumeinheit bei sehr verschiedenem Drucke sich so wenig verschieden zeigt, daß es als eine unveränderliche Größe in die Bestimmung dieses Druckes aufgenommen, oder doch in jedem besondern Falle mit großer Genauigkeit ein Mittelwerth für dasselbe angegeben werden kann.*)

*) Aus sorgfältig angestellten Versuchen hat sich nämlich ergeben, daß Quecksilber unter einem Atmosphärendruck seinen Raum nur um $\frac{5}{10000000}$ verkleinert, Wasser nur um $\frac{5}{1000000}$, und daß Schwefeläther, welcher unter den wässerigen Flüssigkeiten zu den zusammendrückbarsten gehört, eine etwa dreimal so große Raumveränderung wie das Wasser erfährt.

Fig. 35.



Aus dieser doppelten Ursache muß die Bestimmung des Drucks in luftförmigen Körpern auf andere Weise geschehen als in wasserförmigen, obgleich auch für jene, wenn sie nicht in Gefäßen eingeschlossen sind, der Satz noch wahr bleibt, daß ihr Druck auf eine horizontale Ebene dem Gewicht der Luftsäule gleich ist, deren Basis diese Ebene ist und deren Seitenbegrenzung durch die lothrechten Geraden gebildet wird, welche durch den Umfang der Basis hindurch bis an die obere Grenze der Luft laufen. Man kann indessen allen den bei der Bestimmung des Drucks in luftförmigen Körpern sich zeigenden Uebelständen auf einmal dadurch entgehen, daß man den Druck der Luft durch den Druck einer wässerigen Flüssigkeit in's Gleichgewicht setzt und dann diesen, der jenem gleich ist, auf die vorhin angegebene Weise bestimmt. So ist das Barometer entstanden, welches den Druck der Luft an einer gegebenen Stelle unserer Atmosphäre anzuzeigen bestimmt ist.

Füllt man eine etwa 33 Zoll lange und einige Linien weite Glasröhre, welche an einem ihrer Enden zugeschmolzen ist, mit Quecksilber bis an ihren oberen Rand an, verschließt sie dann mit dem Finger und taucht dieses Ende unter Quecksilber, womit ein weiteres Gefäß theilweise angefüllt ist, zieht sodann den Finger behutsam weg, so wird das Quecksilber in der Röhre bis zu einer gewissen Stelle herabsinken, wie in der nebenstehenden Fig. 35. zu sehen ist, wo n n die Quecksilberoberfläche in der Glasröhre, m m die im weitern Gefäße vorstellt. Befestigt man diese Vorrichtung an einem Brette, längs welchem ein genauer Maaßstab aufgetragen worden ist, und hängt man das Ganze so auf, daß die Theilungslinie des Maaßstabes eine lothrechte Lage annimmt, so hat man in ihr ein zu gewöhnlichen Zwecken hinreichend genaues Barometer. Das bis zur Höhe m m in der Röhre stehende Quecksilber hält nämlich dem außerhalb der Röhre im Gefäße befindlichen, bis an dessen Oberfläche m m reichenden Quecksilber das Gleichgewicht, gemäß der Wirkungsweise in communicirenden Röhren. Auf diese Quecksilbermasse drückt innerhalb der Röhre die von m m bis n n erhobene Quecksilbersäule, und außerhalb der Röhre im weiten Gefäße die vom m m bis an die obere Grenze unserer Atmosphäre ragende Luftsäule, und da bei ruhigem Stande des Quecksilbers das Ganze sich im Gleichgewichte befindet, so sind diese beiden Drucke einander gleich; man erhält also den Druck der Atmosphäre, wenn man den Druck der Quecksilbersäule in der Röhre an der Stelle m m aufsucht. Dieser aber bestimmt sich dem früher Gesagten gemäß aus dem lothrechten Abstande der horizontalen Stellen m m und n n von einander, welcher Abstand sich unmittelbar an dem auf das Brett aufgetragenen Maaßstabe ablesen läßt, wenn dieser Maaßstab zuvor eine lothrechte Richtung erhalten hat.

Das Barometer wird zu einem der vollkommensten Instrumente in unserer heutigen Physik, wenn man bei seiner Verfertigung dafür sorgt, daß über der Quecksilberoberfläche n n in der Röhre nichts zurückbleiben kann, was irgend einen merklichen Druck auf dieselbe verursachen könnte, und die Röhre weit genug nimmt, damit die Haarröhrchenwirkung keinen Einfluß auf den Stand des Quecksilbers hat, oder im Falle einer engeren Röhre den aus der Kapillarität entspringenden Unterschied im Stande des Quecksilbers als Correction in die beobachtete Höhe der Säule eingehen läßt. Um erstern Zweck zu erreichen, pflegt man das Quecksilber in der Röhre durch Auskochen in derselben von aller Luft und Feuchtigkeit frei zu machen und damit zugleich auch die Wände der Glasröhre, an denen immer Luft und Feuchtigkeit adhärirt, davon zn befreien. In neuester Zeit hat man denselben Zweck durch andere Mittel zu erreichen gesucht, weil man bemerkt hat, daß sich im Quecksilber beim Kochen stets Quecksilberoxyd in geringer Menge erzeugt, wodurch die Adhäsion des Quecksilbers am Glase eine Aenderung erleidet, in Folge deren die Berechnung der Kapillardepression des Quecksilbers in der Röhre unsicher wird. Man thut am besten, jedesmal das fertige Barometer mit enger Röhre mit einem aus einer zehn pariser Linien weiten Röhre sorgfältig gemachten (Normalbarometer) zu vergleichen und hiernach die Größe der Depression in jenem zu ermitteln.

In dem Maaße als die Höhe der Quecksilbersäule im Barometer den Druck der Luft mit erhöhter Genauigkeit anzeigt, muß auch sein Maaßstab diese Höhe mit größerer Schärfe zu bestimmen im Stande sein; daher sind bei recht guten Barometern diese Maaßstäbe mit Nonien versehen und die möglichst sichere Einstellung der Säulenenden auf dem Maaßstabe geschieht mittelst Loupen. Auch muß dann die Ausdehnung der Glasröhre und insbesondere die des Quecksilbers, so wie die des Maaßstabes in verschiedenen Temparaturen berücksichtiget und danach die Angabe des Instrumentes berichtigt werden.

Um sich einen Begriff davon machen zu können, wie nachtheilig Luft oder Feuchtigkeit in dem Raume der Röhre über n n, welchen Raum man gewöhnlich die toricellische Leere nennt, beim Gebrauche des Barometers werden kann, bedenke man, daß der gewöhnliche Luftdruck ohngefähr 28 pariser Zoll oder 3360 Zehntels Linien beträgt; ist also auch nur $\frac{1}{1000}$ vom Raume der toricellischen Leere Luft unter gewöhnlichem Druck in diesem Raume vorhanden, so übt diese dem Mariotte'schen Gesetze zur Folge $\frac{1}{1000}$ vom Gesammtdrucke aus, und macht, daß das Barometer um 3,36 zehntels Linien tiefer steht, als es sollte, ein Fehler der jeden guten Maaßstab illusorisch machte.

Man hat dem Barometer nach und nach allerhand Formen gegeben, wodurch es aber wesentlich nicht viel gewonnen hat.

Fig 36.



Statt des Gefäßes (Fig. 35.) blies man an das offene Ende der Röhre eine Kugel an, oder man schmolz einen viel weitern Cylinder an dieselbe an und bog hierauf das Ganze in die nebenstehende Form, wobei die Kugel oder der Cylinder das Gefäß der Fig. 35. zu ersetzen im Stande war. Damit war aber kein anderer Vortheil erreicht, als daß die Befestigungs-Mittel, wodurch die Röhre und das Gefäß bei der vorigen Einrichtung in fester gegenseitiger Stellung erhalten werden mußten, erspart werden konnten. Solche Barometer bezeichnete man dadurch, daß man sie Kapselbarometer nannte, während das vorige Gefäßbarometer hieß. Besondere Vortheile glaubte man dadurch zu erreichen, daß man die Barometerröhre auf ihrer offenen Seite blos umbog, wobei das Ganze die nebenstehende Gestalt erhielt, und nannte eine solche mit Quecksilber gefüllte Röhre ein Heberbarometer. Man hoffte namentlich von diesem Barometer, daß sich in ihm die Kapillardepression von selber corrigiren werde, wenn man nur dafür sorgte, daß die Röhre an den Stellen, wo sich bei seinem Gebrauche die innere und äußere Oberfläche des Quecksilbers aufhält, völlig einerlei Querschnitte habe; allein wer die großen Veränderungen kennt, der die Adhäsion unter wenig veränderten Umständen unterworfen ist, wird kaum zu hoffen wagen, daß die Depression des Quecksilbers oben in der Röhre, welche gegen jeden äußern Einfluß geschützt ist, und an ihrem offenen Ende, wo neben Luft und Feuchtigkeit noch andere Ursachen zu einer möglichen Verunreinigung vorhanden sind, sich in gleicher Stärke äußern werde. Jedoch hat das Heberbarometer den Vortheil, daß es viel leichter als jedes andere gemacht werden kann, wodurch es sich als Reisebarometer allerdings vor andern empfiehlt. Das wichtigste und zugleich das am schwierigsten zu erreichende Erforderniß eines brauchbaren Reisebarometers besteht aber darin, daß durch die mit dem Transporte nothwendig verbundenen Erschütterungen und Lagenveränderungen keine Luft in das Innere seiner Röhre gelangen kann. Unter den Mitteln dieses Erforderniß am Heberbarometer herbei zu führen gehört folgende Einrichtung zu den vortheilhaftesten. Der lange Schenkel A des Heberbarometers (Fig. 37.) geht bei B in eine engere Röhre über, welche knieförmig umgebogen und in C zu einer feinen Spitze ausgezogen ist. Ueber diese engere Röhre wird in einigem Abstande von der Spitze C eine mit der A gleichweite angeschmolzen, die an ihrem andern Ende F zugeschmolzen ist, und etwas davon entfernt eine feine Oeffnung f hat, durch welche zwar Luft aber nicht Quecksilber sich einen Durchgang verschaffen kann; zuletzt aber wird diese Röhre

bei D so umgebogen, daß die Theile A und EF möglichst einerlei Richtung annehmen. Wird dieses Barometer im Transporte umgelegt, so füllt sich der lange Schenkel ganz mit Quecksilber an, und ein etwaiger geringer Ueberschuß an Quecksilber fällt in den kurzen Schenkel gegen F hin ohne verloren zu gehen. Tritt nun auch während des Transportes etwas Luft bei D ein, so wird diese durch die Spitze C vom Eindringen in den Raum A abgehalten und kann leicht wieder auf die andere Seite des kurzen Schenkels nach F hin getrieben werden, so daß das Barometer bei einiger Vorsicht lange in brauchbarem Zustande erhalten werden kann.

Fig. 37.

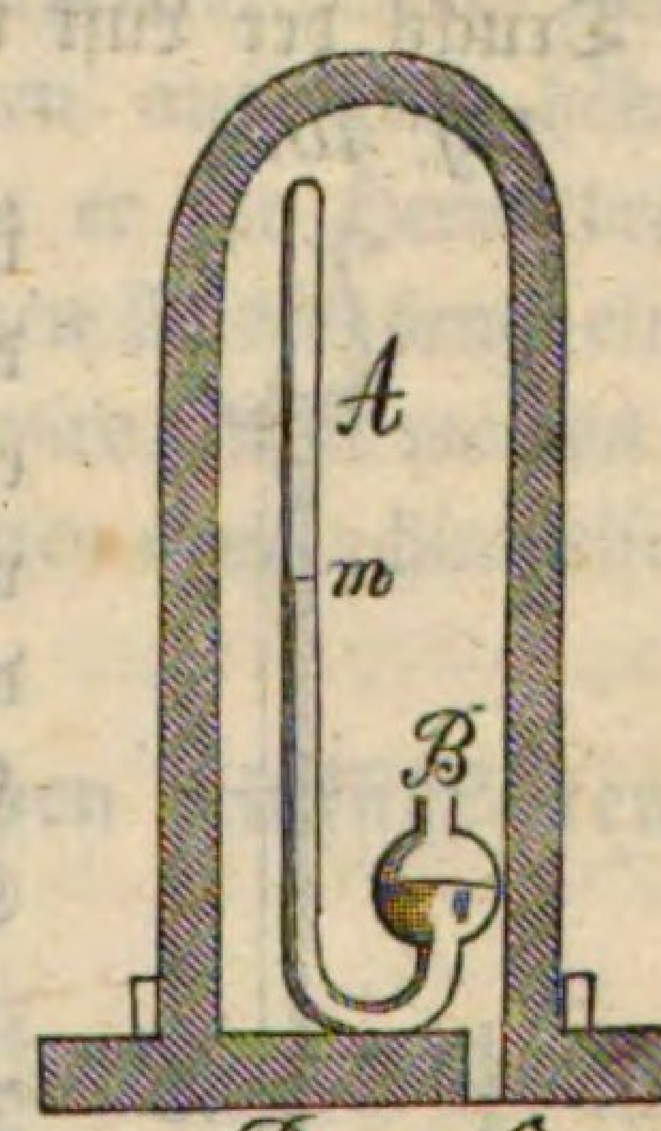


Das Barometer weist in unsern mittleren Klimaten Aenderungen im Druck der Atmosphäre nach, die ihrem Umfange und ihrer Dauer nach unregelmäßig sind, und bis zu 2″ Quecksilberhöhe ansteigen; sie haben zuweilen nur eine Dauer von wenigen Stunden, oft aber auch von mehreren Wochen, und scheinen im Zusammenhange mit den Witterungsverhältnissen zu stehen. Man gründete darauf die Hoffnung dieses Instrument als Wetterverkündiger benützen zu können; diese Hoffnung aber ist bis jetzt noch nicht in Erfüllung gegangen, vielleicht deßwegen, weil man hierzu die rechten Handhaben noch nicht aufgefunden hat. Dagegen hat das Barometer auf andere nicht minder wichtige Verhältnisse unseres Luftkreises aufmerksam gemacht, von denen das folgende besonders hervorgehoben zu werden verdient. In der Aequatorialzone zeigt unsere Atmosphäre nicht die eben besprochenen großen und unregelmäßigen Aenderungen ihres Druckes, dafür aber zu bestimmten Stunden täglich wiederkehrende Variationen, die sich indessen nie bis zu einer Linie Quecksilberhöhe erheben. Gegen 9 Uhr Vormittags steht das Barometer am höchsten, gegen 4 Uhr Abends am niedrigsten. Nachts um 11 Uhr tritt noch einmal im Tage, zu 24 Stunden gerechnet, ein Maximum, früh um 4 Uhr ein Minimum ein. Diese kleinen und regelmäßigen Variationen im Druck unserer Atmosphäre blieben in unsern Gegenden lange unter den viel größeren unregelmäßigen Veränderungen versteckt, bis Ramond zeigte, wie sie sich als Mittel von den Barometerständen vieler Tage, zu bestimmten Stunden genommen, auffinden lassen. In unsern Tagen bedient man sich auch häufig des Barometers zu Höhenmessungen, woraus eine genauere Kenntniß von dem Baue unserer Erdrinde hervorgegangen ist.

§. 33. Von andern Mitteln, den Druck in luftförmigen Körpern zu messen.

Wenn der Druck in einem luftförmigen Körper den in unserer Atmosphäre mehrfach übertrifft, so kann ein barometerartiges Instrument in der Regel nicht mehr zu dessen Messung gebraucht werden wegen der großen Länge, die dann die Quecksilbersäule erhalten würde. Weil indessen so hohe Drucke nur in verschlossenen Gefäßen sich bilden können, so kann man dabei immer eines der folgenden Mittel in Anwendung bringen. Man kann an einer horizontalen Stelle des Gefäßes ein Loch von bekannter Größe anbringen, und dieses mit einem genau anschließenden ebenen Deckel versehen. Belastet man dieses Ventil nach und nach mit immer kleineren Gewichten, so wird die Summe des aufgelegten Gewichtes sammt dem des Ventils den Druck des im Gefäße befindlichen luftförmigen Körpers auf eine Ebene von der bekannten Größe des Loches anzeigen in dem Augenblick, wo dieser das Ventil zu heben im Stande ist. Eine andere bequemere und zugleich genauere Vorrichtung zu demselben Zwecke ist in der nebenstehenden Fig. 38. abgebildet.

Fig. 38.



Eine sehr starke Glasröhre A ist mit einem weitern mit Quecksilber angefüllten Behälter B und ihrer Länge nach mit einem Maaßstabe versehen, der gleiche Raumtheile ihrer innern Höhlung anzeigt. Diese mit einander fest vereinigten beiden Theile werden auf eine Metallplatte D gesetzt, welche bei f der Luft im Gefäße einen Durchgang läßt, und über sie wird ein starker Glascylinder gestürzt, der in einem Rand der Platte D fest eingekittet wird. Zuletzt wird diese Platte auf eine horizontale, dazu bestimmte Stelle des Gefäßes, worin sich der luftförmige Körper befindet, dessen Druck gemessen werden soll, luftdicht aufgeschraubt, so daß deren Oeffnung f mit dem Innern des Gefäßes in Verbindung steht. Der Druck in diesem Instrumente, das noch in andern Formen am Gefäße angebracht werden kann, immer aber Manometer genannt wird, ist dann dem im Innern des Gefäßes gleich; steht daher bei gewöhnlichem Atmosphärendruck das Quecksilber in der Röhre A und im Behälter B gleich hoch, so wird es bei einem stärkern Druck im Behälter in die Röhre A hinauf getrieben werden, und das an der Röhre A abzulesende Verhältniß der Räume giebt umgekehrt genommen dem Mariotte'schen Gesetz gemäß das Verhältniß der Drucke in den beiden Fällen zu erkennen. Hierbei darf man jedoch den Unterschied im Stande des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Röhre so wie etwaige Temparaturänderungen nicht außer Acht lassen, wenn man mit dem Manometer genaue Resultate erzielen will, weil dieser

Niveau-Unterschied und die Ausdehnung der Luft in höheren Temparaturen beträchtlich genug sind, um darnach eine Correction des Raumes, den die Luft einnimmt, anbringen zu müssen. Uebersteigt der in einem Gefäße zu messende Druck den Druck der Atmosphäre nur um wenig, so kann man das vorhin beschriebene Manometer dahin abändern, daß eine Glaskugel A (Fig. 39.) an eine gebogene Glasröhre B, welche oben offen bleibt, angeschmolzen und mittelst einer dazu geeigneten Fassung luftdicht eingekittet wird. Diese Fassung wird an irgend einer Stelle des Gefäßes, worin der Druck der Luft beobachtet werden soll, luftdicht eingesetzt, zuvor aber gießt man eine Flüssigkeit in die Kugel A und versieht die in lothrechter Stellung dienende Röhre B mit einem Maaßstabe. Wenn nun im Gefäße, worin die Luft sich befindet, ein größerer Druck als der atmosphärische wirksam ist, so hebt dieser die Flüssigkeitssäule in der Röhre B über a hinauf, und es giebt die Erhebung der Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre B über die in der Kugel A den Ueberschuß des Drucks der Luft im Gefäße über den der Atmosphäre zu erkennen.

Fig. 39.

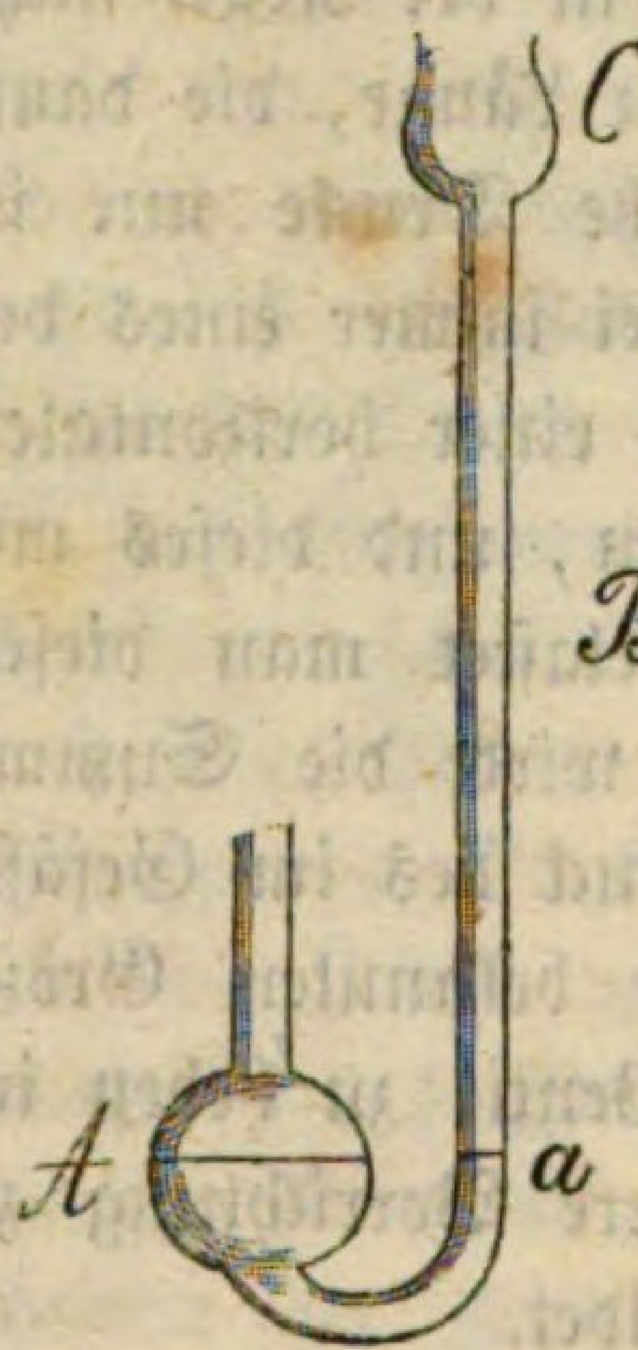


Fig. 40.



Wenn mit diesem letztern Manometer auch Drucke im Gefäße untersucht werden sollen, die den Atmosphärendruck nicht erreichen, so muß man diesem Manometer eine etwas abgeänderte Gestalt geben, wie sie in Fig. 40. versinnlicht worden ist, dann kann nämlich die Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre B auch unter die in der Kugel A zu stehen kommen, und dieser Unterschied im Stande beider giebt jetzt zu erkennen, um wie viel der zu messende Druck geringer ist, als der der Atmosphäre. Die auf der andern Seite von der Kugel A fortlaufende Röhre kann jede beliebige Länge erhalten und je nach Umständen zweckmäßig gebogen werden, um die Vorrichtung möglichst bequem und sicher einsetzen zu können. Giebt man ihr die in Fig. 41. abgebildete Form, um sie mittelst eines Pfropfes luftdicht auf eine Glasflasche aufsetzen zu können, so hat man die in der Chemie sehr häufig benützte sogenannte W e l t e r'sche S i c h e r h e i t s - r ö h r e.

Die zuletzt beschriebenen Manometer besitzen, wenn man das offene Ende der Röhre B in eine Kugel C sich endigen läßt, und in das Manometer nur so viel Flüssigkeit bringt, daß weder die Kugel A noch die C ganz davon angefüllt wird, sämmtlich die besondere Eigenthüm-

lichkeit, daß wenn der Druck der innern Luft eine bestimmte Grenze überschreitet, diese sich selber einen Ausweg in's Freie verschafft, und umgekehrt, daß äußere Luft in's Innere des Gefäßes dringt, an welchem das Manometer angesetzt ist, so wie der Druck in diesem hinter dem der Atmosphäre um eine willkürlich zu bestimmende Größe zurückbleibt. Durch diese Eigenschaft werden sie in manchen Fällen, wo ein zu großer oder zu kleiner Druck im Gefäße während der Operation Gefahr oder Nachtheil bringen kann, höchst schätzenswerth; ihr verdankt auch die in Fig. 41. abgebildete Vorrichtung ihren besondern Namen.

Fig. 41.



Man hat in der Physik, wie in der Chemie, nicht wenig kleine Apparate, deren Wirkung wie die der Manometer auf den Druck von Flüssigkeiten sich gründet, wie z. B. Heber, Auswasch-Apparate u. dgl. Wenn dieselben auch nicht gerade an sich eine hohe wissenschaftliche Bedeutung haben, gewähren sie doch dem Experimentator so viel Annehmlichkeit und Zeitersparniß, daß er sie oft eben so ungern vermißt als andere im Range höher stehende. Nicht selten jedoch erhält der Druck von Flüssigkeiten auch eine höhere technische Bedeutung, wie z. B. da, wo er zur Hervorbringung eines nahe oder völlig gleichmäßigen Ausfließens einer Flüssigkeit aus dem Gefäße, worin sie enthalten ist, benützt wird. Wir werden in den folgenden Paragraphen auf mehrere Fälle der beiden Arten einzeln hinweisen.

§. 34. Uebergang der wasser- und der luftförmigen Flüssigkeiten in einander.

So verschieden auch die wasserförmigen Flüssigkeiten sowohl wie die luftförmigen in ihrem chemischen Verhalten zu andern Körpern sind, so wenig unterscheiden sich die Körper einer jeden dieser beiden Klassen gleich bei ihrem äußern Auftreten von einander. Es finden bei den flüssigen Körpern nicht die vielen Modifikationen der Flüssigkeit statt, welche wir bei festen Körpern als Modifikationen ihrer Festigkeit wahrgenommen und durch die Beiwörter „hart" und „weich", „zäh" und „zerbrechlich", „elastisch" und „unelastisch" bezeichnet haben. Das eine Merkmal aller Flüssigkeiten ist die Verschiebbarkeit ihrer Theile durch jede noch so kleine dazu auffordernde Kraft. Dazu kommt bei den wasserförmigen noch das zweite, daß sie bei beträchtlichen Veränderungen des äußern Drucks, unter dem sie stehen, doch den Raum, welchen sie einnehmen, kaum merklich anders werden lassen; bei den luftförmigen Flüssigkeiten hingegen ändert sich dieses zweite Merkmal dahin ab, daß sie unter

verschiedenem äußern Druck verschiedene Räume einnehmen, die bei unveränderlicher Temperatur den Drucken umgekehrt proportional sind, weßwegen sie schon bei geringen Aenderungen im Drucke recht merkliche Unterschiede in dem jedesmal von ihnen eingenommenen Raume wahrnehmen lassen, und wobei sie immer wieder den früheren Raum einnehmen, so wie der äußere Druck auf seine vorige Stärke zurückkehrt, welche Eigenschaft den luftförmigen Flüssigkeiten auch die Benennung der expansibeln oder der elastischen zugezogen hat. Wiewohl nun durch dieses zweite Merkmal eine völlig scharfe Grenze zwischen wasserförmigen und luftförmigen Flüssigkeiten gegeben ist, so müssen wir an dieser Stelle doch noch auf einen besondern Fall aufmerksam machen, bei welchem jene Unterschiede ihre Bestimmtheit verlieren und gewissermaßen in einander übergehen.

Es giebt viele wasserförmige Flüssigkeiten, die diese Art der Flüssigkeit nur in Folge des auf ihnen lastenden äußern Druckes oder der sie umgebenden Temperatur besitzen. Läßt man z. B. eine geringe Quantität Wasser unter dem Quecksilber der toricellischen Röhre in deren leeren Raum aufsteigen, so wird man gewahr, daß in dem Augenblicke, wo das Wasser an die Oberfläche des Quecksilbers gelangt, die Quecksilbersäule sinkt, um so mehr, je höher gerade die Temperatur zur Zeit des Versuches ist. Hat man sehr wenig Wasser in die toricellische Leere steigen lassen, und nimmt diese einen hinreichend großen Raum ein, so verschwindet alles sichtbare Wasser; es verliert seine bisherige Art der Flüssigkeit und nimmt die einer luftförmigen an, welche als solche auf die Quecksilbersäule drückt und sie zum Sinken bringt. Aber auch wenn sich noch Wasser in seiner gewöhnlichen Form über dem Quecksilber befindet, so ist es nicht dieses, welches das Sinken der Quecksilbersäule bewirkt, wie sich schon aus seiner geringen Höhe und seinem specifischen Gewichte in Vergleich zu dem des Quecksilbers erkennen läßt, sondern es ist wieder das über ihm gebildete luftförmige Wasser. Eben so verhalten sich Weingeist, Aether und noch manche andere wasserförmige Flüssigkeiten; nur die Strecke, um welche die Quecksilbersäule sinkt, ändert sich mit diesen Flüssigkeiten. Es läßt sich hieraus schließen, daß solche wasserförmige Flüssigkeiten einen luftförmigen Zustand annehmen, so wie die atmosphärische Luft nicht mehr auf ihnen lastet, wiewohl in einer, erst später näher zu bestimmenden, beschränkten Weise, wie schon daraus hervorgeht, daß nicht jede wässerige Flüssigkeit sich in der toricellischen Leere in eine luftförmige umwandelt, so wie deren Menge ein bestimmtes Quantum übersteigt. Die so gebildeten luftförmigen Flüssigkeiten weichen aber in ihren Eigenschaften von den bisher angegebenen ab, wovon man sich leicht auf die folgende Weise überzeugen kann. Ist nämlich das Gefäß, worin die toricellische Röhre befestigt ist, tief genug, daß unter dieser Röhre noch Quecksilber in solcher Tiefe zu finden ist, als die Höhe der toricellischen Leere beträgt, und senkt man die toricellische Röhre

in diesem Quecksilber allmählig tiefer ein, so bleibt dabei der lothrechte Abstand zwischen den beiden Quecksilberspiegeln stets merklich gleich groß, zum Beweis, daß der Druck der über dem Quecksilber gebildeten luftförmigen Flüssigkeit sich nicht ändert, obgleich der Raum, den sie einnimmt, stets kleiner wird. Gleichzeitig aber wird man gewahr, daß in dem Maaße, als dieser Raum kleiner wird, mehr von der wasserförmigen Flüssigkeit, aus der jene luftförmige sich gebildet hat, über der Quecksilbersäule sich ansetzt; sie vermag also im luftförmigen Zustand nur einen Druck von bestimmter Größe bei einer bestimmten Temperatur auszuüben, und wird gezwungen, so wie sich diesem Drucke ein größerer entgegenstellt, wieder in den wasserförmigen Zustand zurück zu gehen.

Erhitzt man eine von den Flüssigkeiten, welche die eben beschriebenen Eigenschaften besitzen, von unten stets mehr und mehr, so bringt man es zuletzt dahin, daß sich fortwährend vom Boden der Flüssigkeit luftförmige Theile in Blasenform erheben und in's Freie treten, dergestalt, daß bei fortgesetzter Erhitzung alle wasserförmige Flüssigkeit sich auf diese Weise in luftförmige umwandelt. Die Temperatur, bei welcher diese Verwandlung, welche man das S i e d e n der Flüssigkeit nennt, ihren Anfang nimmt, ist bei den verschiedenen Flüssigkeiten eine verschiedene, aber die äußere Erscheinung dieses Hergangs ist bei allen die gleiche. So lange die Blasen im Innern der siedenden Flüssigkeiten sich befinden, sind sie vollkommen durchsichtig, wie jede andere Luft, so wie sie aber an die Oberfläche dieser Flüssigkeit gekommen sind und in die äußere Luft übergehen, werden sie neblig, und die jetzt sichtbar werdenden Theilchen sind schon wieder wasserförmige Flüssigkeit, und lassen sich unter einander zu größeren Tropfen vereinigen. Ein solches Verschwinden der Blasen zeigt sich schon innerhalb der Flüssigkeit, so lange diese noch nicht allerwärts eine gleiche Temperatur angenommen hat; die vom Boden sich erhebenden Blasen verschwinden in einiger Höhe noch innerhalb der Flüssigkeit, indem sie ihre Luftform verlieren und wieder in die Wasserform zurückgehen. Diese Erscheinung liefert den Beweis, daß dergleichen wasserförmige Flüssigkeiten den äußern Druck, wodurch ihnen diese Art der Flüssigkeit geworden ist, in einer bestimmten Temperatur zu überwältigen vermögen, wo sie dann die Luftform annehmen, die sie jedoch sogleich wieder aufgeben, wenn diese Temperatur aus irgend Ursachen niedriger wird.

Die auf die beiden beschriebenen Arten aus wasserförmigen hervorgehenden luftförmigen Körper haben zur Unterscheidung von andern, die man Gase nannte, den Namen D ä m p f e erhalten, und sind noch in dem vorigen Jahrhundert für eine eigene Klasse der luftförmigen Körper gehalten worden, weil man der Meinung war, daß alle übrigen weder durch Druck noch durch Temperaturerniedrigung sich in wasserförmige verwandeln lassen. Diese zu enge Ansicht, wonach die Dämpfe und Gase als Körper von absolut verschiedenen

Eigenschaften angesehen wurden, mag noch durch einen andern Umstand neue Nahrung erhalten haben; man hatte nämlich bemerkt, daß Dämpfe auch bei jedem Drucke und in jeglicher Temperatur sich bilden können, wiewohl in ungleich langsamerer Weise, eine Eigenthümlichkeit derselben, die bei dem damaligen Stande der Physik den Blick in ihre wahre Natur zu trüben ganz geeignet war. Die Binde sank allmählig, nachdem Daltons Untersuchungen mehr Licht über die Natur der Dämpfe verbreitet hatten, sank jedoch erst dann ganz, als der reich begabte Experimentator Faraday einen großen Theil der Gase in den wasserförmigen Zustand thatsächlich überzuführen gelehrt hatte. Ihm gelang es, die folgenden Gase bei den daneben angezeigten Temperaturen und Drucken in wasserförmige Flüssigkeiten zu verwandeln:

Namen der Gase.	Temperatur in Centesimalgraden.	Druck in Atmosphären.
Schweflige Säure	— 7	2,0
Cyangas	+ 7	3,7
Chlorgas	+ 15	4,0
Ammoniakgas	+ 10	5,6
Schwefelwasserstoffgas	+ 10	17,0
Kohlensaures Gas	0	36,0
Salzsaures Gas	+ 10	40,0
Stickstoffprotoxydgas	+ 7	50,0

Nach diesen Versuchen unterliegt es wohl keinem Zweifel mehr, daß alle Gase durch einen hinreichend hohen Druck bei niedriger Temperatur sich zu liquiden Flüssigkeiten condensiren lassen, obgleich bis jetzt manches Gas noch nicht zur wasserförmigen Flüssigkeit condensirt worden ist, und daß die Gase in der Nähe dieses Condensationspunktes sich wie Dämpfe verhalten werden, welches Verhalten wir später noch näher kennen lernen werden. Den oben mitgetheilten Gesetzen bezüglich der wasserförmigen und luftförmigen Flüssigkeiten ist sonach als Cautele die Bemerkung beizufügen, daß sie in der Nähe des Punktes, wo die luftförmige Flüssigkeit in den wasserförmigen Zustand übergeht, oder die wasserförmige Flüssigkeit einen luftförmigen Zustand annimmt, Abänderungen erleiden, die durch den Uebergang in einen neuen Aggregations-Zustand veranlaßt werden.

§. 35. Auf den Druck der Flüssigkeiten sich gründende Vorrichtungen. Heber.

Indem wir nun eine kurze Musterung der vom Drucke der Flüssigkeiten abhängigen, theilweise beim ersten Blick befremdenden Erscheinungen unter-

nehmen, schicken wir die folgende allgemeine Betrachtung voraus. Wenn eine und dieselbe Flüssigkeit in ungleichen Tiefen auf gleich große Ebenen drückt, so wird der Unterschied zwischen diesen beiden Drucken durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule bestimmt, deren Grundfläche eine von jenen Ebenen ist, und deren Höhe durch den lothrechten Abstand zwischen den Schwerpunkten beider Ebenen gegeben wird, wie aus den in §. 31. gegebenen Bestimmungen sogleich hervorgeht. Aus diesem Grunde ist der Unterschied zwischen zwei solchen Drucken auf Flächen von gleicher Größe und relativer Lage unter verschiedenen Flüssigkeiten dem Gewichte von einer Raumeinheit dieser Flüssigkeiten proportional, und wird daher um so geringer, je kleiner das Gewicht von einem gleichen Raum der Flüssigkeit ist. Nun ist aber der dichteste luftförmige Körper unter den gewöhnlichen Umständen immer noch einige hundert Male specifisch leichter als der am mindesten dichte wasserförmige, es wird folglich der Unterschied im Drucke auf dieselben zwei Stellen sehr viel geringer sein, wenn er von einem luftförmigen, als wenn er von einem wasserförmigen Körper herrührt.

Taucht man eine an beiden Seiten offene, nicht zu weite Röhre in eine wasserförmige Flüssigkeit ein, verdeckt sie dann an ihrem obern Ende mit dem Finger luftdicht und zieht sie aus der Flüssigkeit heraus, so bleibt diese in der Röhre entweder ganz oder theilweilweise hängen und fällt erst dann aus ihr heraus, wenn man den ihr oberes Ende verschließenden Finger abzieht. Hierbei sind folgende besondere Fälle wohl zu unterscheiden. Taucht man die Röhre ganz in der Flüssigkeit unter und verschließt sie hier mit dem Finger, so wird nach dem Herausziehen die ganze Röhre angefüllt bleiben, nur wenn die Flüssigkeit Quecksilber ist, wird die oben beim Barometer angezeigte Ausnahme eintreten da, wo die Röhre eine Länge von mehr als 28″ hat. Alle andern wasserförmigen Flüssigkeiten fordern zum Hervorrufen der analogen Ausnahme Röhren von solcher Länge, wie sie im gewöhnlichen Leben nicht vorzukommen pflegen. Taucht man aber die Röhre in der wasserförmigen Flüssigkeit nicht ganz unter, so daß in ihrem obern Theile noch auf eine Strecke Luft zurück bleibt, so wird gleichwohl nach dem Herausziehen der Röhre noch von der Flüssigkeit in ihr hängen bleiben. Diese Erscheinung hat zur Einführung des hierneben (Fig. 42.) abgebildeten **Stechhebers** in das bürgerliche Leben Anlaß gegeben, mit dessen Hilfe man aus einem Fasse eine kleine Quantität der in ihm enthaltenen Flüssigkeit herausheben kann.

Fig. 42.



Der Grund von dieser Erscheinung ist leicht einzusehen. Ist nämlich die ganze Röhre mit der Flüssigkeit angefüllt, so drückt diese von oben nach unten zur Röhre heraus, dagegen die äußere Luft von unten nach oben hinein; überwiegt daher der Druck der

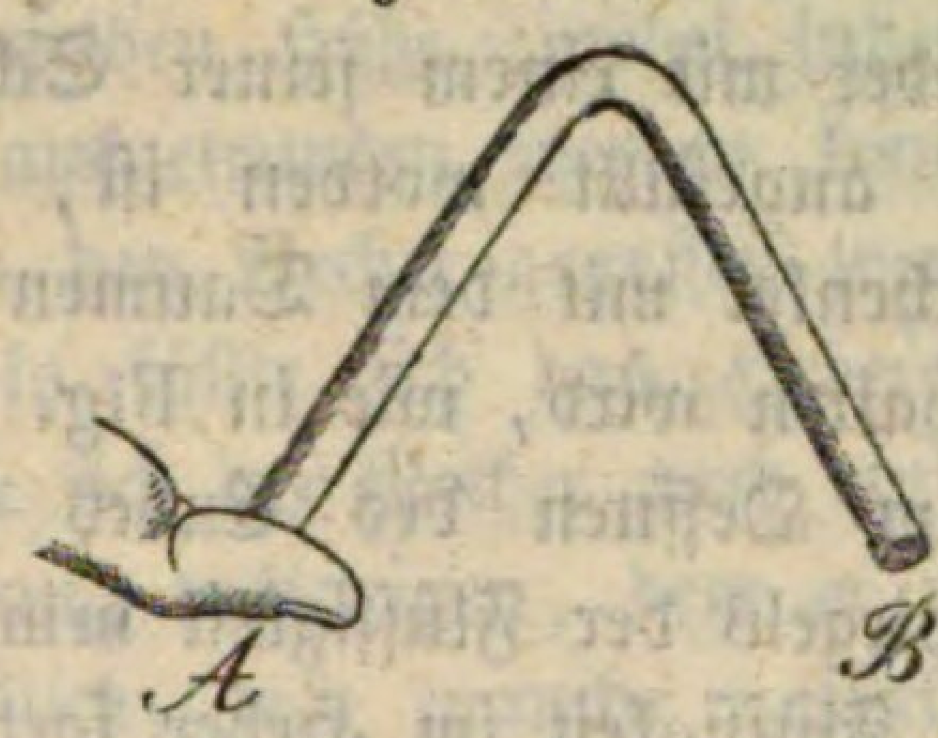
Luft den der wasserförmigen Flüssigkeit, so kann diese nicht aus der Röhre heraustreten, überwiegt aber der letztere den ersteren, so wird Flüssigkeit aus der Röhre so lange heraustreten, ohne daß Luft in die Röhre hineintritt, falls die untere Oeffnung der Röhre eng genug ist, bis der Druck der noch in der Röhre befindlichen wässerigen Flüssigkeit dem Druck der äußern Luft gleich geworden ist. Hat man jedoch die Röhre nicht ganz untergetaucht, so bleibt in ihrem obern Ende noch Luft von dem gewöhnlichen Druck der Atmosphäre zurück. Verschließt man daher auch noch ihr unteres Ende unterhalb der Flüssigkeit mit einem Finger und hebt sie so aus ihr in lothrechter Stellung heraus, so drückt die obere Luft in der Röhre eben so stark gegen die in ihr enthaltene wasserförmige Flüssigkeit von oben nach unten, wie die äußere Luft von unten nach oben drückte, wenn der untere Finger weggezogen würde; diese Flüssigkeitssäule muß also vermöge ihres eigenen Gewichtes sinken, und daher theilweise aus der Röhre heraustreten, wenn der untere Finger weggezogen wird. In Folge dieses theilweisen Austretens erhält aber die oben in der Röhre befindliche Luft Gelegenheit, sich über einen größern Raum auszubreiten, wodurch ihr Druck dem mariotteschen Gesetz gemäß vermindert wird, weßhalb jenes Austreten der Flüssigkeit nur so lange andauert, bis ihr eigener um den der innern Luft vermehrter Druck sich mit dem der äußern Luft in's Gleichgewicht gesetzt hat. Aus dem hier beschriebenen Hergange erklärt sich auch der Umstand, daß in diesem letztern Falle die wasserförmige Flüssigkeit in der Röhre in einer um so geringern Menge aus ihr heraustritt, je enger die Röhre an ihrem obern Ende und je weiter sie da ist, wo die wässerige Flüssigkeit in ihr sich aufhält. Taucht man einen gläsernen Stechheber in seiner gewöhnlichen Stellung in Wasser bis zu einem an seiner engen Röhre angebrachten Zeichen m ein (Fig. 42.) und hebt ihn, oben verschlossen, aus dem Wasser heraus, so wird dieses nur wenig unter das Zeichen herabsinken; senkt man ihn aber in umgekehrter Lage bis an dasselbe Zeichen ein, wobei sein weites Gefäß ganz mit Luft angefüllt bleibt, und schließt nun die obere Oeffnung dieses Gefäßes luftdicht zu, so wird nach dem Herausheben das Wasser in der Röhre beträchtlich und viel mehr als zuvor sich von dem Zeichen m entfernt haben.

Im Allgemeinen heißt jede an ihren beiden Enden offene, in ihrer Mitte knie- oder klammerförmig gebogene Röhre ein **Heber**. Solche Heber besitzen eigenthümliche Eigenschaften, von denen wir jetzt reden werden. Wird eine Heberröhre, welche die Gestalt wie Fig. 43. hat, ganz mit irgend einer wasserförmigen Flüssigkeit vollgefüllt, hierauf ihr eines Ende mit dem Daumen verschlossen und nun umgestürzt (Fig. 43. a.), so fließt aus ihrem offenen Schenkel nichts heraus, aus dem gleichen Grunde, wie bei dem

Fig. 43.

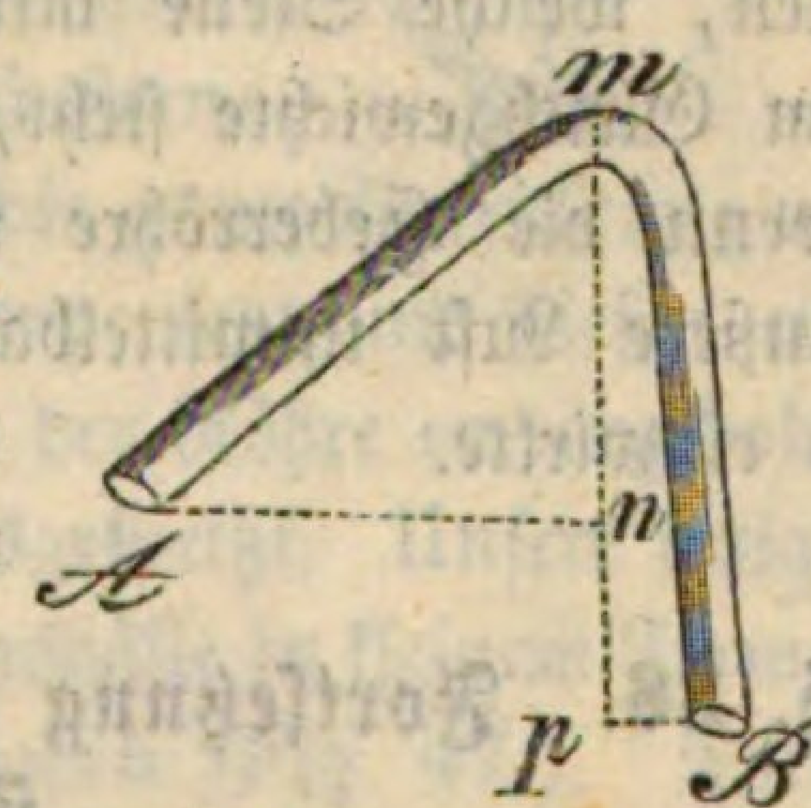


Fig. 43. a.



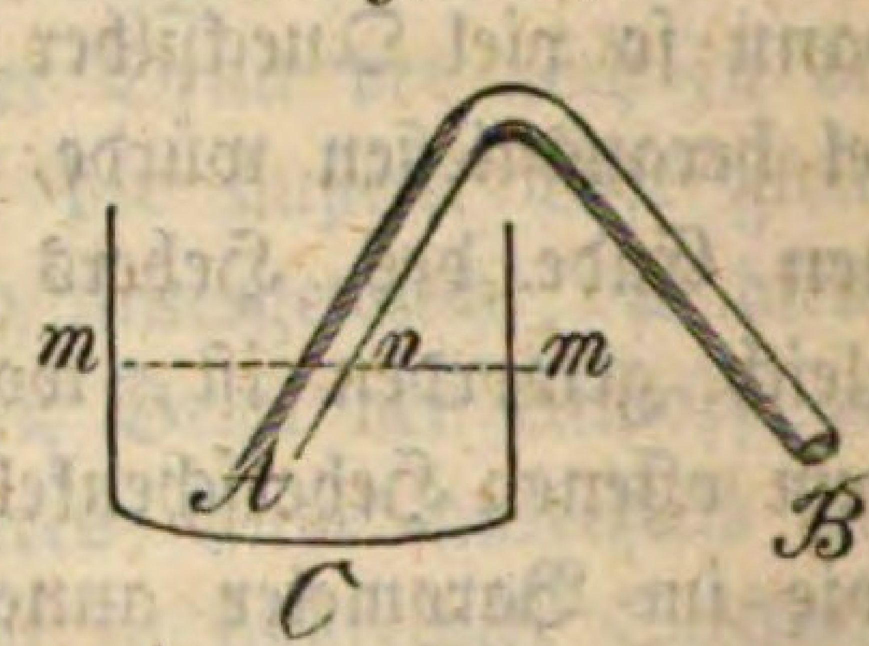
Stechheber, es müßte denn sein, daß man sich des Quecksilbers zu dem Versuche bedient hätte und eines mehr als 28 Zoll hohen Hebers, wo dann so viel Quecksilber aus dem offenen Schenkel herausfließen würde, bis sein Druck am offenen Ende des Hebers dem der äußern Luft gleich geworden ist, wobei das Quecksilber in dem offenen Heberschenkel dieselbe lothrechte Höhe wie im Barometer annehmen würde. Gewöhnlich indessen wird der ganze Heber mit seiner Flüssigkeit angefüllt bleiben; so wie man aber den Daumen von dem Ende der Röhre, das durch ihn bisher verschlossen war, abhebt, wird alle in ihr enthaltene Flüssigkeit durch die Oeffnung B oder A hindurch abfließen, je nachdem beim Wegziehen des Daumes B oder A in größerer Tiefe stand. Könnte man vor dem Wegnehmen des Daumes die Oeffnungen A und B genau in eine Horizontalebene bringen, so würde sich die Flüssigkeit in ihm im Gleichgewicht erhalten können, jedoch nur in einer Art von unhaltbarem Gleichgewicht, das bei der geringsten Störung verloren ginge, und nur mittelst Balanciren sich auf längere Zeit erhalten ließe. Der hier beschriebene Hergang ist leicht erklärlich. Steht nämlich in dem Augenblicke, wo der Daumen weggezogen wird, die Oeffnung A höher als die B und zieht man (Fig. 43. b.) vom höchsten Punkt m im Innern der Heberröhre die Lothrechte mp, hierauf gegen diese aus den Mitten der Oeffnungen A und B die horizontalen Linien An und Bp, so übt die Flüssigkeit in der Röhre an den Enden A und B nach außen hin einen Druck aus, der bei gleicher Druckfläche den Längen mn und mp proportional ist. Dagegen drückt die äußere Luft gegen die Oeffnungen der Röhre mit einer Stärke, die wir als gleich an A und B annehmen dürfen, dem im Eingange dieses Paragraphs Gesagten gemäß. Uebersteigt dieser Druck die vorigen beiden und stellen wir ihn, auf die gleiche Druckfläche bezogen, durch die Länge L vor, so wird die Flüssigkeit an der Oeffnung A mit der Stärke L — mn, bei der Oeffnung B mit der Stärke L — mp oder L — mn — np in die Röhre hineingetrieben; es bleibt also die Seite bei A mit einer der Höhe np, d. h. dem lothrechten Abstande der Oeffnungen A und B von einander, proportionalen Druckhöhe gegen die Seite von B im Ueberschuß, dem zur Folge die ganze Flüssigkeitssäule mit einer dieser Druckhöhe entsprechenden Geschwindigkeit längs der Röhre fortgeschoben und zur Oeffnung B hinausgetrieben wird, und offenbar findet das Umgekehrte statt, so wie beim Abheben des Daumens die Oeffnung A tiefer als die B steht.

Fig. 43. b.



Ein ähnlicher Erfolg findet statt, wenn der gefüllte und umgekehrte Heber mit einem seiner Schenkel in dieselbe Flüssigkeit gestellt wird, womit er angefüllt worden ist, während sein anderer Schenkel mit dem Daumen oder Finger verschlossen gehalten wird, wie in Fig. 44. zu sehen ist. Steht beim Oeffnen des Endes B dieses unterhalb des Spiegels der Flüssigkeit mm im Gefäße C, so wird die Flüssigkeit im Heber fort und fort von A nach B hin zur Oeffnung B hinausgetrieben mit einer Geschwindigkeit, die dem lothrechten Abstande der Oeffnung B von dem Flüssigkeitsspiegel als Druckhöhe entspricht, und dieß dauert mit abnehmender Geschwindigkeit so lange fort, bis der Spiegel mm die Oeffnung A oder B erreicht hat. Man kann auf diese Weise alle Flüssigkeit aus einem Gefäße C bis auf eine zuvor bestimmte Stelle hin herausfließen machen, und auch ganz, wenn man das Ende A bis auf den Boden des Gefäßes C bringt und dabei das Ende B stets in größerer Tiefe als das A erhält. Hebt man aber, bevor man das äußere Ende B des Hebers öffnet, dieses über den Flüssigkeitsspiegel mm hinauf, so bewegt sich die Flüssigkeit im Heber ganz und gar in das Gefäß C zurück. Der Grund von allen den hier auftretenden Erscheinungen ergiebt sich sogleich aus den zuvor erklärten, wenn man erwägt, daß die Flüssigkeit im Gefäße mit der im Heber bis zu der Stelle n angestiegenen, welche Stelle mit dem Spiegel mm in einerlei Horizontalebene liegt, im Gleichgewichte steht, daß folglich die Erscheinung genau dieselbe ist, wie wenn die Heberröhre von A bis n hin gar nicht vorhanden wäre und die äußere Luft unmittelbar auf die Flüssigkeit in der Heberröhre an der Stelle n einwirkte.

Fig. 44.



§. 36. Fortsetzung der auf den ungleichen Druck von beiden Seiten sich gründenden Vorrichtungen.

Die Wirkung der Heber war schon den Alten bekannt. Sie machten eine niedliche Anwendung davon in dem Vexirbecher, von ihnen Diabetes genannt. Dieser Becher hatte eine doppelte Wand und war unten mit einem hohlen Körper versehen, der ihm zugleich als Fuß diente, wie er in Fig. 45. abgebildet ist.

Fig. 45.



Mitten im Boden bei m war eine dünne Röhre angelöthet, die hier mittelst einer sehr feinen Oeffnung in den Becher mündete, und sich zwischen den zwei Wänden bis zu einer gewissen Höhe o hinzog, zuletzt aber wieder herablief, so daß ihr anderes offenes Ende tiefer als m bei n lag. Wurde nun der Becher mit Wein gefüllt bis zu einer Höhe,

die noch unterhalb der höchsten Stelle o des Heberchens lag, so füllte sich zwar der eine Arm des engen Hebers bis zu derselben Höhe, wobei indessen der Wein im Becher ruhig stehen blieb, und ausgetrunken werden konnte, wann man wollte; wenn aber so viel Wein in den Becher gegossen wurde, daß er über die höchste Stelle o hinaufreichte, so füllte sich das Heberchen von selber ganz an mit Wein, und dann entleerte sich der Becher nach einiger Zeit bis auf den letzten Tropfen, zur Ueberraschung desjenigen, dem er vorgesetzt war. Diese Vorrichtung macht es begreiflich, wie manche natürliche Wasseransammlungen auf unserer Erde sich gerade dann erst entleeren, wenn sie zuvor bis zu einer bestimmten Höhe angestiegen sind.

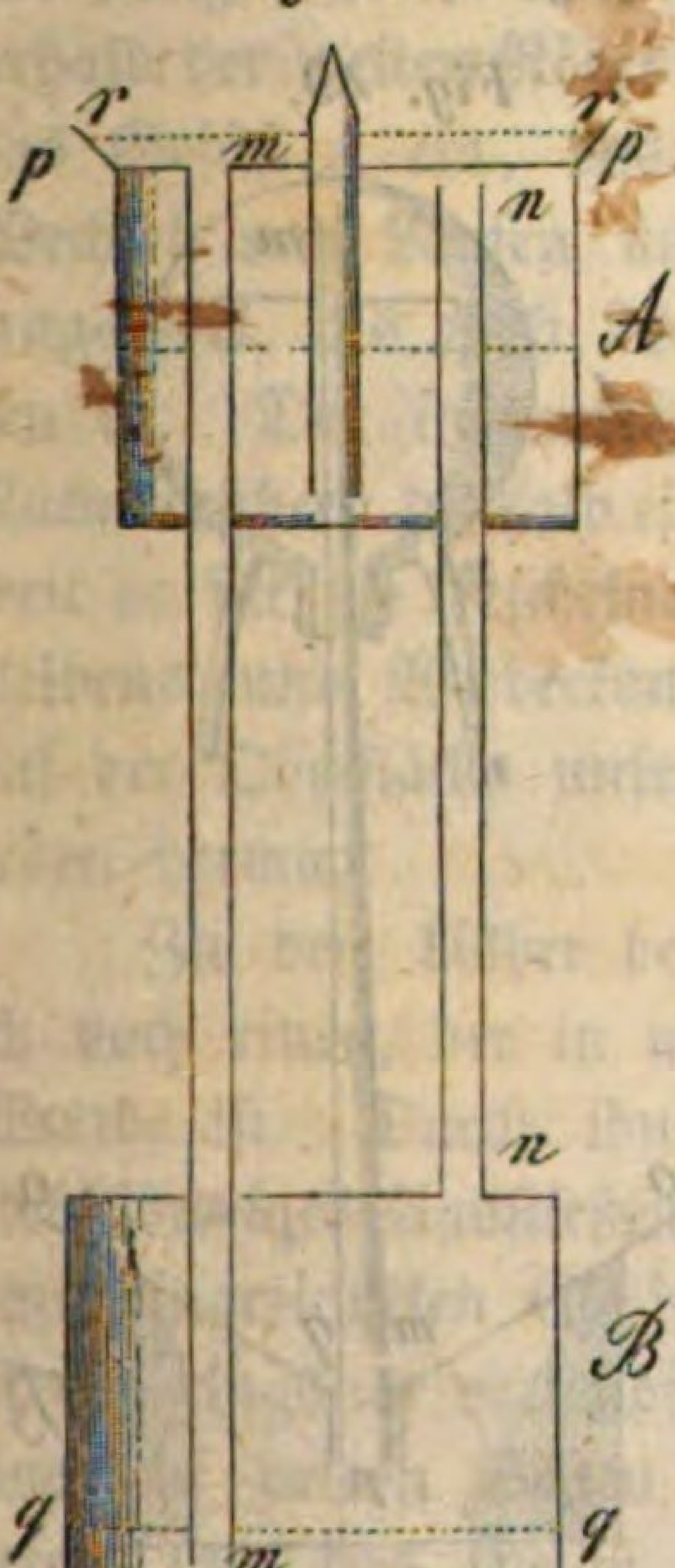
Die frühere Physik, welche von manchen jetzt bekannten speciellen Kräften der Natur nur wenig oder gar nichts wußte, war auf einen viel kleinern Raum angewiesen, als die gegenwärtige; in diesem aber fand sie manches auf, was noch heut zu Tage in Ansehen steht. Unter den einfach netten Anordnungen, die sie erdachte, hebe ich die folgenden, auf den Druck der Flüssigkeiten sich stützenden hervor.

Fig. 46.



1) Der Heronsball (Fig. 46.). In ein zum Theil mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäß wird eine fast bis an den Boden reichende Röhre luftdicht eingesetzt, wo dann das Niveau der Flüssigkeit im Gefäße und in der Röhre in einer und derselben Horizontalen liegt, abgesehen von der etwa vorhandenen Capillarwirkung; verstärkt man aber den Druck der Luft im Gefäße in Vergleich zu dem der äußern Luft, z. B. dadurch, daß man die ganze Vorrichtung unter den Recipienten der Luftpumpe setzt und diesen entleert, so wird die Flüssigkeit in der Röhre emporgehoben und zu deren Mündung hinausgespritzt. Unsere jetzigen Spritzflaschen sind solche Heronsbälle in kleinem Format.

Fig. 47.



2) Der Heronsbrunnen (Fig. 47.). Dieser besteht in einem Heronsball, in welchem die innere Luft mittelst einer zweiten damit verbundenen Vorrichtung sich gleichsam von selber comprimirt auf die neben abgebildete Weise.

A ist der Heronsball, B ein anderes Gefäß, welches mit dem Heronsball durch zwei Röhren mm und nn verbunden ist, von denen die mm oben außerhalb dem Heronsballe mündet, luftdicht durch ihn hindurch, fast bis an den Boden des Gefäßes B hinabgeht, an dessen oberer Wand sie luftdicht angelöthet worden ist. Die Röhre nn mündet in das Gefäß B, und ihr eines Ende ist hier fest angelöthet; sie geht

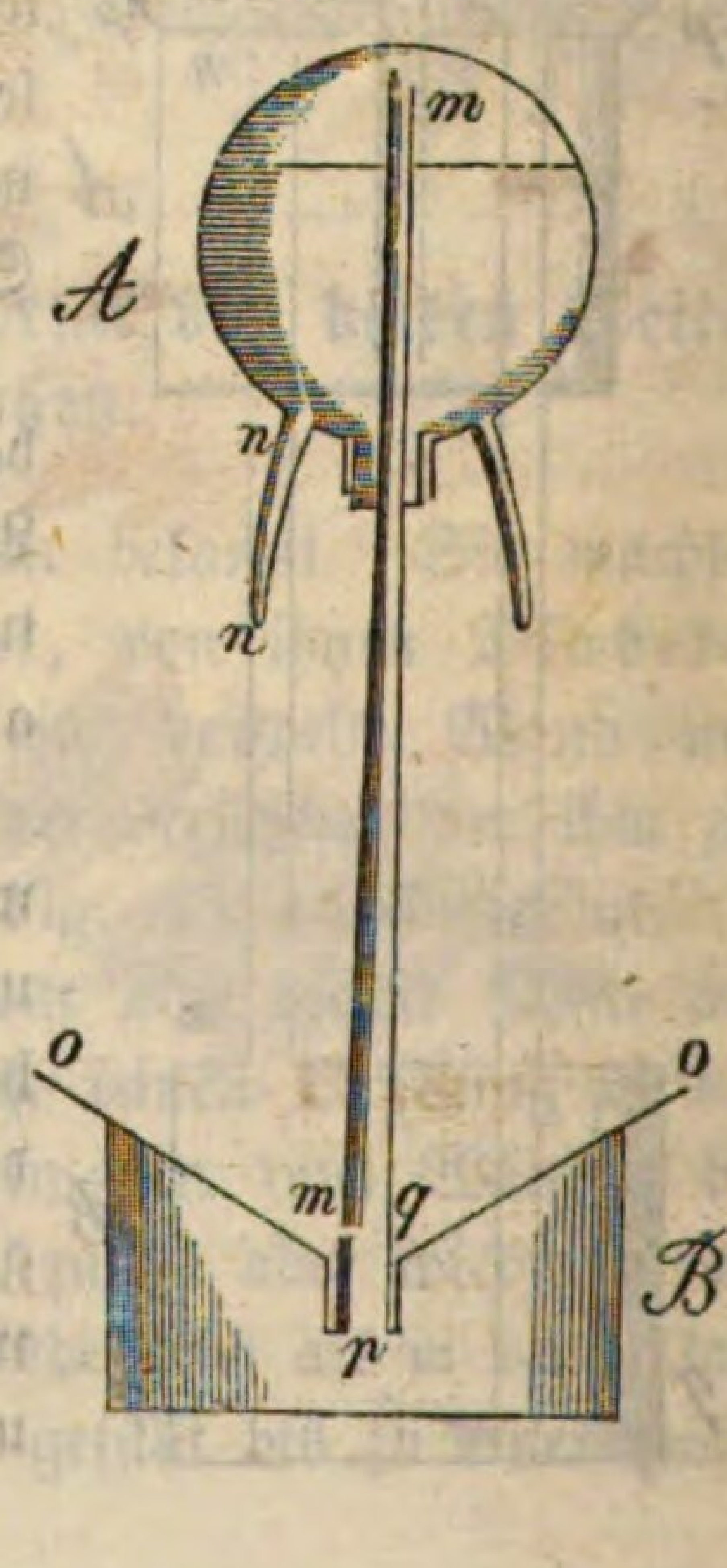
durch den Heronsball hindurch fast bis an dessen obere Wand, und ist in dessen untern Boden luftdicht eingesetzt. Ist nun der Heronsball A zum Theil mit Flüssigkeit angefüllt und dadurch zur Wirkung bereit, und gießt man irgend eine andere wasserförmige Flüssigkeit in den oben am Heronsballe angebrachten Rand pp ein, so sinkt diese durch die Röhre mm in das Gefäß B hinab, breitet sich auf dessen Boden bald zu einer Höhe qq aus, wobei die Luft in B von der Mündung der Röhre mm abgeschlossen ist. Von da an wird die Luft im Gefäße B durch den Druck einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe die lothrechte Entfernung des Niveaus rr im Rande von dem Niveau qq im untern Gefäße B ist, comprimirt und zugleich auch die im Heronsballe, welche mit jener mittelst der Röhre nn in Verbindung steht, deßhalb fängt der Heronsball zu springen an mit einer der eben genannten Druckhöhe entsprechenden Stärke, und setzt seine Wirkung ziemlich gleichmäßig fort, wenn man dafür sorgt, daß im obern Rande pp stets Flüssigkeit im Ueberfluß vorhanden ist, bis entweder alle Flüssigkeit aus ihm bis zur untern Mündung seiner Röhre herausgetrieben worden ist, oder bis sich das Gefäß B sammt der Röhre nn ganz mit Flüssigkeit angefüllt hat. Eine sehr niedliche, die äußere Luft des Heronsballs verdünnende und ihn dadurch zum Springen bringende Vorrichtung ist die hierneben (Fig. 48.) abgebildete. A ist ein ringsum verschlossenes Gefäß, in welches die Röhre mm luftdicht eingesetzt ist, und neben dieser noch die den Heronsball vorstellende nn. Wird das Gefäß A theilweise mit Wasser angefüllt und umgestürzt, zugleich aber auch die Röhre nn in ein mit Wasser angefülltes Gefäß B gestellt, so wird dieses Wasser durch die Röhre nn in das Gefäß A durch den Druck der äußern Luft hineingetrieben, in Folge der in diesem mittelst des durch die Röhre mm abfließenden Wassers bewirkten Luftverdünnung. Je länger die Röhre mm ist, desto größer ist die Wirkung dieser Vorrichtung.

Fig. 48.



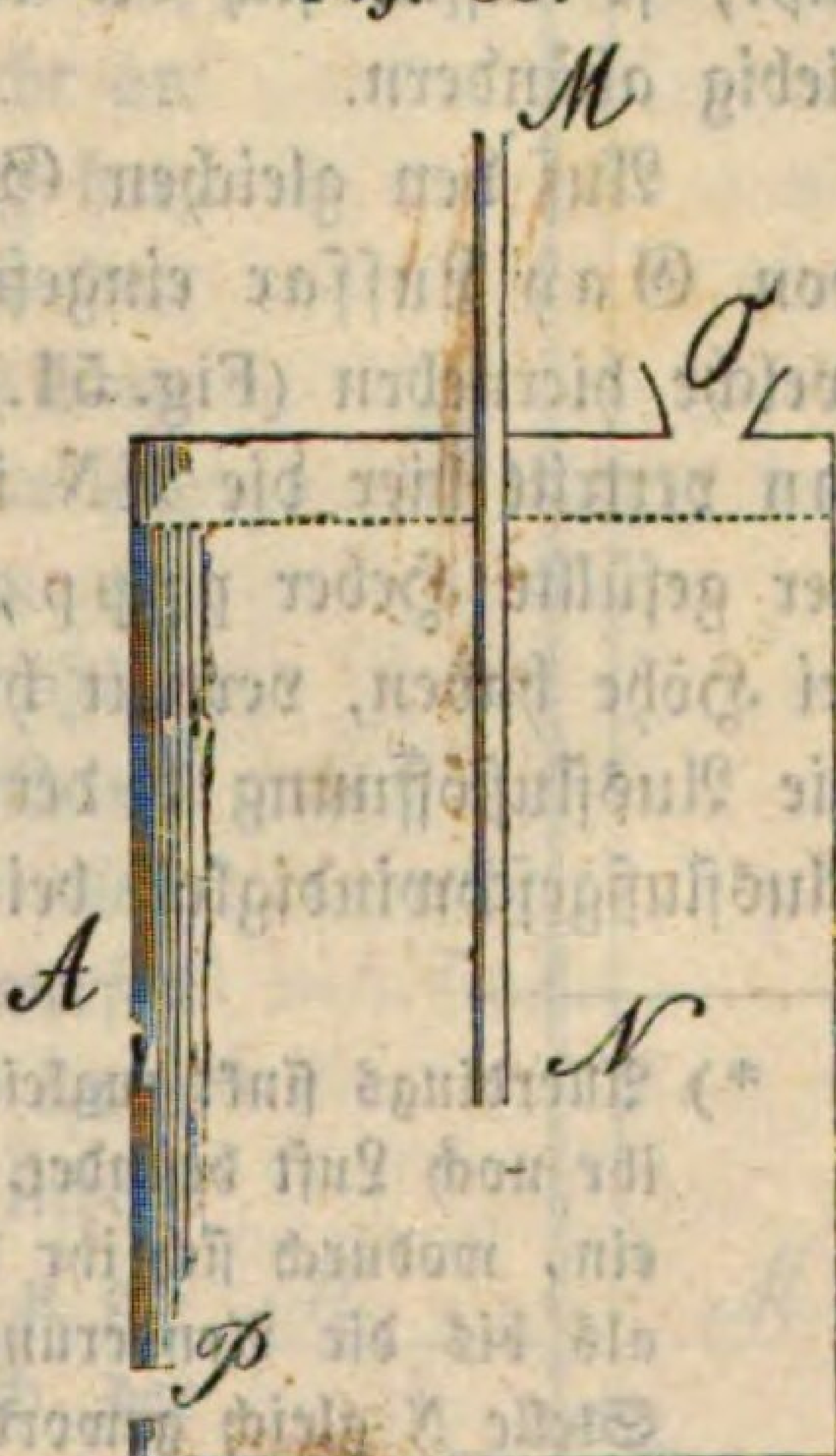
3) Der intermittirende Brunnen. Wird in ein Gefäß A (Fig. 49.) eine oben und unten offene Röhre mm luftdicht eingesetzt, welche bis nahe an dessen obere Wand reicht, und mündet noch außerdem in dieses Gefäß irgendwo an dessen untern Theil eine oder mehrere so gebogene Röhren nn, daß ein durch sie hindurchgetriebener Flüssigkeitsstrahl eine Richtung annimmt, welche

Fig. 49.



der Röhre mm nahehin parallel läuft. Löthet man hierauf das untere Ende der Röhre mm in eine trichterförmige Metallwand oo ein, versieht diese bei p mit einer kleinen Oeffnung und bohrt bei m etwas oberhalb p in die Röhre mm eine andere Oeffnung ein, so ist der intermittirende Brunnen fertig, wenn man dafür Sorge trägt, daß das Wasser in der Röhre mm und das außer ihr mit einander in Verbindung stehen. Kehrt man nämlich diese Vorrichtung um, zieht die mittelst Kork eingesetzte Röhre mm aus dem Gefäße A heraus, gießt in dasselbe Wasser ein, und kehrt jetzt die ganze Vorrichtung wieder in ihre alte Lage zurück, den Trichter oo auf irgend ein oben offenes Gefäß setzend in der Stellung, wie sie in Fig. 49. angezeigt ist, so fließt das Wasser zur Röhre oder zu den Röhren nn aus und fällt in die trichterförmige Vertiefung oo, sammelt sich hier, wenn die Oeffnung p klein genug gemacht worden ist, um nicht sogleich alles Wasser, was in die Trichterhöhlung fällt, durch sich hindurch zu lassen, an, und steigt bald bis zur Oeffnung q empor, die dann durch das Wasser verschlossen wird, und keine äußere Luft mehr in das Gefäß A eindringen läßt. Trotz dem fährt das Wasser noch eine kurze Weile fort durch die Röhre nn auszufließen, gleichzeitig aber verdünnt sich die Luft im Gefäße A und in Folge hört das Ausfließen durch die Röhre nn auf, sobald der Druck der Luft in diesem Gefäße nebst dem Druck des Wassers am äußern Ende der Röhre nn dem Druck der Atmosphäre gleich geworden ist. Unterdessen aber läuft das Wasser im Trichter oo durch die Oeffnung p ab und sinkt bald unter die Oeffnung m hinab, dann dringt, wenn das Wasser in der Röhre mm durch die Oeffnung p, die man deßhalb gern unterhalb der weiten Röhre mm anbringt, ausfließen kann, wieder äußere Luft in das Gefäß A ein, das Laufen der Röhre nn beginnt von Neuem und dieser Wechsel von Laufen und Nichtlaufen setzt sich so lange fort, als noch Wasser im Gefäße A vorhanden ist. Der intermittirende Brunnen hat bei den Naturforschern deßhalb ein gewisses Ansehen erhalten, weil er für die Erscheinung eines periodischen Ausbleibens und Wiederkommens bei einigen Quellen auf der Oberfläche unserer Erde eine Erklärung zu geben vermag.

Fig. 50.



Zu den bisher beschriebenen Apparaten füge ich noch einen, der in manchen Fällen von großem Werthe ist. Durch ihn läßt sich ein vollkommen gleichförmiges Ausfließen einer Flüssigkeit aus einem dazu eingerichteten Gefäße bewirken. Wird nämlich in ein ringsum verschlossenes Gefäß A (Fig. 50.) eine auf beiden Seiten offene Röhre luftdicht eingesetzt und das Gefäß hierauf mittelst einer oben

zur Seite angebrachten Oeffnung O ganz mit einer Flüssigkeit angefüllt und, nachdem dieses geschehen ist, die Oeffnung O luftdicht verschloßen, so strömt aus diesem Gefäße die Flüssigkeit, wenn ihr an irgend einer Stelle P in der Nähe des Bodens ein Ausfluß eröffnet wird, stets mit derselben, der lothrechten Entfernung zwischen N und P entsprechenden Geschwindigkeit aus, so lange als die Flüssigkeit noch über dem Ende N der Röhre MN steht. Erst nachdem die Flüssigkeit im Gefäße unter die Oeffnung N herabgesunken ist, nimmt die Ausflußgeschwindigkeit successive ab und wird null, wenn die Flüssigkeit bis unter die Oeffnung P hinabgekommen ist. Der Grund dieses Verhaltens ist leicht einzusehen. Bevor der Flüssigkeit ein Ausfluß an der Stelle P geöffnet ist, drückt die äußere Luft auf die in der Röhre MN stehende Flüssigkeit; in dem Augenblicke aber, wo die Stelle P geöffnet wird und der Ausfluß beginnt, sinkt die Flüssigkeit in der Röhre MN sehr schnell bis an deren Ende N herab *), und von hier ab fängt der völlig gleichmäßige Ausfluß eigentlich erst an. Dabei treten stets Luftblasen aus der Röhre MN an die Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäße A, deren Absonderung man auf alle Weise zu erleichtern suchen muß, und deren Entstehung anzeigt, daß der Druck in der Tiefe N von unten nach oben eben dem von oben nach unten wirkenden in derselben Tiefe gleich ist. Es ist daher alles gerade so, als ob der Druck der Luft in N blos durch das Gewicht der Flüssigkeit unterhalb N vermehrt würde, weßhalb die Ausflußgeschwindigkeit in P blos durch die lothrechte Druckhöhe von N bis P bestimmt wird. Man wird ohne mein Erinnern einsehen, wie vortheilhaft eine solche Einrichtung bei Versuchen wird, bei welchen ein völlig gleichmäßiger Ausfluß ein Haupterforderniß ist. Sorgt man dafür, daß sich die Röhre MN luftdicht höher und niedriger stellen läßt, so lassen sich die Ausflußgeschwindigkeiten beliebig abändern.

Fig. 51.



Auf den gleichen Grundsätzen beruht auch die von Gay Lussac eingeführte Auswaschvorrichtung, welche hierneben (Fig. 51.) abgebildet ist. Die Röhre mn vertritt hier die MN in der vorigen Figur und der gefüllte Heber pppp, dessen beide Enden einerlei Höhe haben, vertritt hier an seinem äußern Ende die Ausflußöffnung P der vorigen Figur, so daß die Ausflußgeschwindigkeit bei diesem Apparate durch die

*) Allerdings sinkt zugleich auch die Flüssigkeit im Gefäße A herab, wenn sich über ihr noch Luft befindet, und in Folge nimmt die Luft in ihm einen größern Raum ein, wodurch sich ihr Druck vermindert; dieses Sinken aber gedeiht nicht weiter, als bis die Aenderung im Drucke der Luft dem Druck der Flüssigkeit an der Stelle N gleich geworden ist, wozu nur ein unbedeutendes Sinken der Flüssigkeit gehört.

lothrechte Entfernung der beiden Horizontalebenen nn und pp von einander bedingt wird. Hierbei kann noch der artige Umstand benützt werden, daß wenn der Trichter, worin der auszuwaschende Körper auf einem Filtrum liegt, so unter dem äußern Schenkel des Hebers befestigt wird, daß sein oberster Rand höher als n steht, wie es in der vorstehenden Fig. 51. angedeutet ist, die Flüssigkeit in ihm nie über die Ebene nn hinaufkommen kann, weil hier die Druckhöhe null wird.

§. 37. Fortsetzung. Wasserpumpen.

Unter den hieher gehörigen Werkzeugen nehmen unstreitig die verschiedenen Arten von Pumpen den ersten Rang ein. Alle Pumpen haben zum Zweck, eine Flüssigkeit von einer Stelle weg an eine andere Stelle hin zu bringen; wobei man zunächst Wasser- und Luftpumpen von einander unterscheidet, von denen erstere wasserförmige, letztere luftförmige Flüssigkeiten in Bewegung zu bringen haben. Die Wasserpumpen zerfallen ihrer Wirkungsweise nach in Saug- und Druckpumpen, die Luftpumpen in Verdünnungs- und in Verdichtungspumpen, welch letztere man am öftesten Exantlirungs- und Compressionspumpen nennt.

Fig. 52.



1) Die wesentlichsten Theile einer Saugpumpe sind in Fig. 52. abgebildet. A ist der Hauptkörper einer Saugpumpe, B eine an ihn luftdicht befestigte Röhre (Steigröhre), welche bis unter die Oberfläche MM der Flüssigkeit geht, die durch die Pumpe gehoben werden soll. Nicht weit von dieser Oberfläche ist in die Röhre B ein gut gearbeiteter Ring mm eingesetzt, welcher luftdicht an ihrer Wand anliegt und in der Mitte eine Oeffnung hat, über der ein scheibenförmiger Körper n liegt, durch den sie gut verschlossen wird. Diese letztere Vorrichtung (Ventil) hat zum Zweck, der Flüssigkeit einen Zutritt in die Röhre von unten nach oben zu gestatten (indem ein Druck von unten nach oben den Körper n in die Höhe hebt und der Flüssigkeit einen Durchgang durch das Ventil eröffnet, wobei jedoch Vorsorge getroffen ist, daß diese Hebung, um den Körper n nicht aus seiner Lage werfen zu können, nur sehr wenig beträgt); dagegen ihren Durchgang von oben nach unten abzusperren, indem durch jeden Druck in dieser Richtung der Körper n gegen den Ring mm angedrückt wird, und dadurch der Durchgang der Flüssigkeit in derselben Richtung verhin-

dert wird.*) Der Pumpenkörper A besteht aus einem gut gearbeiteten metallenen Cylinder (Stiefel), in welchem sich ein luftdicht anschließender Kolben den KK mittelst einer Stange SS hin und her bewegen läßt. Dieser Kolist durchbohrt und mit einem Ventile wie das eben beschriebene versehen, welches einer Flüssigkeit den Durchgang von unten nach oben gestattet, in entgegengesetzter Richtung aber verwehrt. Auf diesem Cylinder kann noch eine andere weniger sorgfältig bearbeitete Röhre, durch welche die Stange SS hindurch geht, aufgesetzt sein, an der in beliebiger Höhe die Ausflußröhre aa angebracht wird.

Das Spiel einer Saugpumpe besteht nun in Folgendem: Nehmen wir an, der Kolben stehe unten am Pumpenkörper auf und die Luft in der Steigröhre drücke gerade so stark wie die äußere, so wird die Flüssigkeit in der Steigröhre einerlei Höhe mit deren äußern Spiegel MM haben. Wird nun der Kolben bis an den obern Theil des Pumpenkörpers in die Höhe gezogen, und schließt er stets luftdicht an den Wänden des Cylinders an, so findet die Luft in der Steigröhre Gelegenheit, sich über einen größern Raum zu verbreiten, und in Folge wird ihr Druck in dem gleichen Maaße geringer. Die Luft oberhalb des Kolbens kann nicht in die Steigröhre treten, wenn der Kolben und sein Ventil luftdicht schließt;**) es drückt mithin die Luft in der Steigröhre gegen die in ihr bei MM stehende Flüssigkeit weniger stark als die äußere Luft gegen den Flüssigkeitsspiegel MM selbst, und das Gleichgewicht stellt sich den Gesetzen des Drucks von Flüssigkeiten gemäß dadurch her, daß die Flüssigkeit in der Steigröhre über MM hinauf steigt, um so mehr, je geringer der innere Raum der Steigröhre im Verhältniß zu dem innern Raum des Pumpenkörpers ist. Wird jetzt der Kolben in die Tiefe des Pumpenkörpers zurück gestoßen, so kann keine Flüssigkeit durch das untere Ventil der Steigröhre gehen, daher ist der Kolben gezwungen, die Luft unter ihm in einen kleinern Raum als anfangs zusammenzudrücken, weßhalb sie einen größern Druck als die äußere Luft annimmt, und dem zur Folge durch das Ventil im Kolben entweicht so lange, bis ihr Druck wieder dem der äußern Luft gleich geworden ist, wenn die Ventile möglichst leicht beweglich hergestellt

*) Je nach der Form des Körpers n, der sich an den Ring mm genau anschließt, haben solche Ventile die Benennung von Scheiben-Kugel- oder Kegel-Ventilen erhalten. Zuweilen wendet man auch Stöpselventile an. Dieß sind abgestumpfte, an einer dünnen Stange befestigte Kegel, welche genau in eine gleichgestaltete Vertiefung am Boden des Stiefels eingeschliffen werden und deren Stangen mit fester Reibung durch den Kolben der Pumpe hindurch gehen; sie haben den Vortheil, daß der Ventilkörper mit einiger Kraft gegen seine Vertiefung angedrückt wird und deßhalb sicherer schließt.

**) Dieser luftdichte Verschluß findet allerdings bei unsern gewöhnlichen Wasserpumpen oft nicht statt; man sucht ihn dann durch Eingießen von Wasser oberhalb des Kolbens herzustellen.

worden sind. Ein ganz analoger Hergang findet bei jeder folgenden Hebung und Senkung des Kolbens statt, wobei die Flüssigkeit in der Steigröhre stets in größere Höhen und zuletzt in den Pumpenkörper selber gelangt, wenn hierzu der Druck der Flüssigkeit in der Steigröhre gegen die Horizontalebene M M nicht etwa größer werden müßte als der Druck der äußern Luft, in welchem Falle die Saugpumpe ihre Wirkung nicht mehr zu Stande bringen kann; ist aber die Flüssigkeit bis in den Pumpenkörper getreten und zur Ausflußröhre a a gelangt, so wird nach jedem Kolbenzuge so viel Flüssigkeit auslaufen als der Raum beträgt, den der Kolben durchläuft.

Man kann in diesem Stadium leicht die Kraft angeben, welche zur Bewegung der Pumpe erforderlich ist. Diese Kraft ist offenbar die zur Hebung des Kolbens erforderliche, und zusammengesetzt aus dem Gewichte der zu hebenden Theile, aus der Reibung des Kolbens an den Wänden des Pumpenkörpers und aus der Ungleichheit des Drucks der Flüssigkeiten auf beiden Seiten des Kolbens, von welchen Theilen wir den letztern allein aufsuchen werden. — Die oberhalb des Kolbens bis zur Ausflußröhre befindliche Flüssigkeit übt auf den Kolben den Druck

$$h_1 \; F \alpha$$

aus, dem §. 31. entsprechend, wenn h_1 die lothrechte Höhe dieser Flüssigkeitssäule, F die Größe des Kolbens in Zollen und α das Gewicht von einem Kubikzolle der Flüssigkeit vorstellt. Ueber dieser Säule lastet der Druck der Atmosphäre und pflanzt sich durch die Flüssigkeit bis zum Kolben fort, den er mit der Stärke

$$H_1 \; F \beta$$

trifft, wenn H_1 die Barometerhöhe am Ende der Ausflußröhre a a in Zollen und β das Gewicht von einem Kubikzoll Quecksilber bedeutet, der Gesammtdruck, den der Kolben von oben nach unten erleidet, ist folglich

$$h_1 \; F \alpha + H_1 \; F \beta \; .$$

Eben so ist

$$h_2 \; F' \alpha$$

die Größe des Druckes, den die vom untern Rand des Kolbens bis zur Horizontalebene M M reichende Flüssigkeit in der Steigröhre auf ihren hier vorhandenen Querschnitt von oben nach unten ausübt, wenn h_2 die lothrechte Höhe dieser Flüssigkeitssäule und F′ die Größe des innern Querschnitts der Steigröhre in der Ebene M M bezeichnet, und

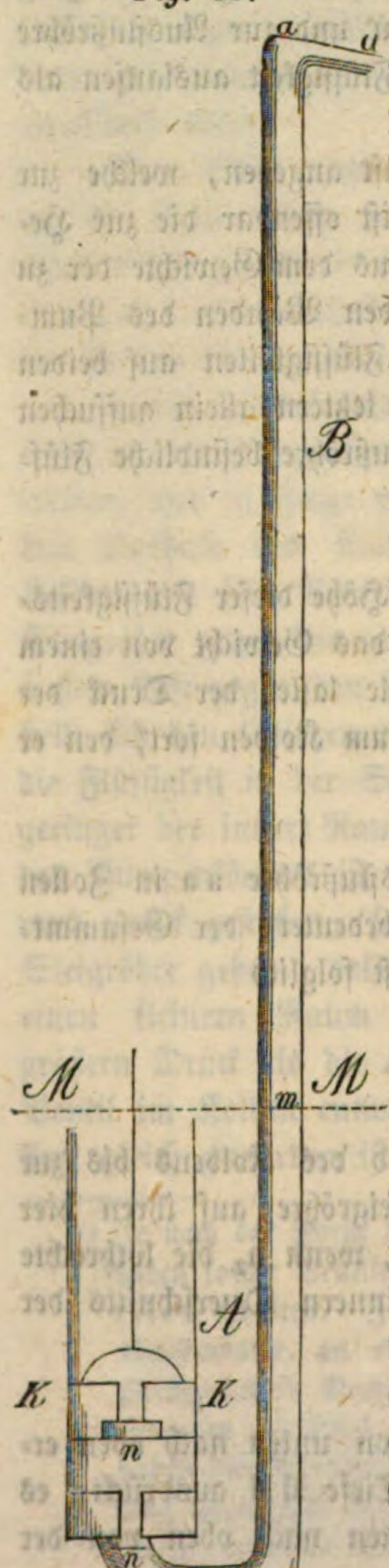
$$H_2 F' \beta$$

ist die Größe des Drucks, den derselbe Querschnitt von unten nach oben erleidet, wenn H_2 die Barometerhöhe in Zollen in der Tiefe M M ausdrückt; es bleibt also an diesem Querschnitt ein Druck von unten nach oben von der Größe

$$H_2 F' \beta - h_2 F' \alpha$$

übrig, welcher sich durch die Flüssigkeit hindurch bis zum Kolben mit unveränderter Stärke fortpflanzt, gegen den Kolben aber mit einer im Verhältniß von $\frac{F}{F'}$ abgeänderten Kraft einwirkt. Diesemnach wirkt auf den Kolben eine von unten nach oben drückende Kraft von der Größe

Fig. 53.



$$H_2 F \beta - h_2 F \alpha$$

ein, und zieht man diese von der vorhin gefundenen, den Kolben von oben nach unten in Bewegung setzenden ab, so bleibt die von oben nach unten zu wirkende Mittelkraft von der Größe

$$(H_1 - H_2) F \beta + (h_1 + h_2) F \alpha$$

übrig, wofür einfach

$$(h_1 + h_2) F \alpha$$

gesetzt werden kann, wenn man erwägt, daß die Barometerstände oben an der Ausflußröhre und unten am Spiegel der Flüssigkeit kaum merklich von einander verschieden sich zeigen werden. Nennt man den lothrechten Abstand der Ausflußöffnung in der über dem Pumpenkörper angesetzten Röhre vom Spiegel der Flüssigkeit $\mathfrak{H}$ und die Dicke des Kolbens D, so ist

$$h_1 + h_1 = \mathfrak{H} - D ,$$

folglich die zum Heben des Kolbens erforderliche Kraft gleich

$$(\mathfrak{H} - D) F \alpha ,$$

oder wenn man die Dicke des Kolbens als zu unbeträchtlich gegen die Höhe $\mathfrak{H}$ außer Acht läßt, gleich

$$\mathfrak{H} F \alpha .$$

2) Die wesentlichsten Bestandtheile der Druckpumpe sind in nebenstehender Fig. 53. abgebildet. A ist der eigentliche Pumpenkörper, B die Steigröhre, beide eben so eingerichtet, wie bei der Saugpumpe, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Ventile n n, sowohl das im Kolben wie das in der Steigröhre zunächst dem Pumpenkörper, der Flüssigkeit im Pumpenkörper nur von oben nach unten Eingang gestatten, in entgegengesetzter Richtung dagegen verwehren, und daß jetzt gewöhnlich das ganze Pumpenwerk A unter dem Spiegel MM der fortzubewegenden Flüssigkeit, also in derselben steht.

Die Wirkungsweise der Druckpumpe ist viel einfacher als die der Saugpumpe. Vor dem Gebrauch

der Druckpumpe wird die Flüssigkeit in der Steigröhre bei m auf gleicher Höhe von MM stehen. Wird der Kolben in die Höhe gezogen, so kann die Flüssigkeit in der Steigröhre kraft des an ihr angebrachten Ventils nicht in den Pumpenkörper gelangen; es entsteht daher unter dem Kolben ein luftverdünnter Raum, in den die Flüssigkeit oberhalb des Kolbens, dessen Ventil sie nicht daran hindert, eintritt. Wird nun der Kolben in die Tiefe gestoßen, so kann die eingetretene Flüssigkeit nicht wieder über den Kolben zurück, dessen Ventil sie davon abhält, wohl aber in die Steigröhre gelangen, deren Ventil es gestattet; der Kolben treibt daher die ganze vor ihm liegende Flüssigkeit in die Steigröhre hinein, weßhalb sie in dieser höher ansteigt. Ein ähnliches Ergebniß findet bei jeder neuen Hebung und Senkung des Kolbens statt, bis die Flüssigkeit auf die Höhe der Ausflußröhre aa gekommen ist, von wo ab bei jedem Kolben-Hin- und Hergang so viel Flüssigkeit ausfließt, als der Kolben vor sich hertreibt. Die zu diesem Einstoßen des Kolbens nöthige Kraft bestimmt sich gerade so wie bei der Saugpumpe. Ueber dem Kolben wirkt von oben nach unten ein Druck von der Größe

$$H_1 F \beta + h_1 F \alpha ,$$

wenn F die Größe der Kolbenfläche in Quadratzollen H_1 die Barometerhöhe bei der Ebene MM und h_1 die Höhe der Flüssigkeit von MM ab bis zur obern Kolbenfläche in Zollen bedeutet, β und α die Gewichte von einem Cubikzoll Quecksilber und der zu transportirenden Flüssigkeit. Gegen die untere Kolbenfläche wird von unten nach oben ein Druck ausgeübt, dessen Größe

$$H_2 F \beta + h_2 F \alpha$$

ist, wenn H_2 die Barometerhöhe an der Ausflußröhre und h_2 den lothrechten Abstand der Ausfluß-Oeffnung in der Steigröhre von der untern Kolbenfläche in Zollen anzeigt. Es bleibt folglich ein Mitteldruck von unten nach oben übrig, dessen Größe

$$(H_2 - H_1) F \beta + (h_2 - h_1) F \alpha$$

oder blos

$$(h_2 - h_1) F \alpha$$

ist, wenn wir die Barometerhöhe an beiden Stellen als einander gleich ansehen. Setzen wir wieder den lothrechten Abstand der Ausflußöffnung von der horizontalen Ebene MM gleich $\mathfrak{H}$ und die Dicke des Kolbens gleich D, so ist

$$h_2 - h_1 = \mathfrak{H} + D ,$$

also die zur Bewegung des Kolbens erforderliche Kraft gleich $(\mathfrak{H} + D)\ F\alpha$, oder, weil wir die Dicke des Kolbens gegen die Höhe $\mathfrak{H}$ vernachlässigen können, gleich

$$\mathfrak{H}.\ F.\ \alpha.\ ^{*)}$$

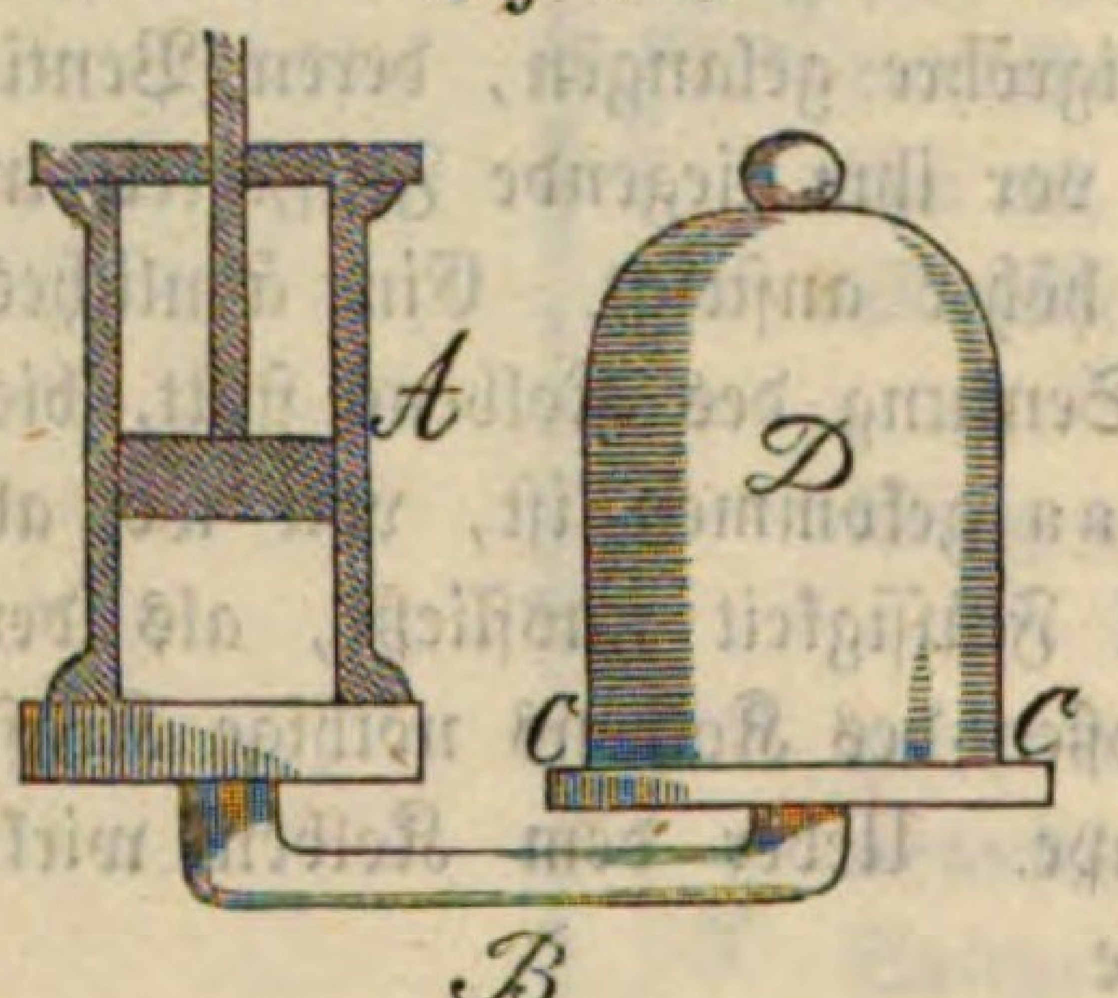
*) Es folgt aus der Vergleichung der zwei bei Sauge- und Druckpumpen erhaltenen Resultate mit einander, daß beide Arten von Wasserpumpen ohngefähr gleiche Wirkung haben; die Wahl der einen oder andern muß sich daher nach andern Umständen richten.

§. 38. Fortsetzung. Verdünnungspumpe.

Wir kommen nun zu den Luftpumpen und zwar

3) zu der Verdünnungspumpe. Diese besteht aus dem Pumpenkörper ähnlich denen bei Saug- und Druckpumpen; bei ihr aber muß Stiefel und Kolben mit allem nur möglichen Geschicke und Fleiß ausgearbeitet sein, indem kleine Unvollkommenheiten hier größern Nachtheil als dort bringen. An dem Stiefel A (Fig. 54.), der von Metall oder Glas ist, wird eine Röhre B luftdicht befestigt, auf deren anderen Seite eine ebene Platte von Metall oder Glas CC, der Teller, in horizontaler Richtung luftdicht aufgeschraubt wird, und auf diesen Teller werden die Gefäße D, Recipienten, worin die Luft verdünnt werden soll, so aufgesetzt, daß zwischen Recipient und Teller Luft weder ein- noch ausgehen kann, wozu eine völlig genaue ebene Bearbeitung der beiden Theile auf der Seite, wo sie aneinander anliegen, erfordert wird; dann genügt eine Bestreichung des untern Recipientenrandes mit etwas Fett zu einem vollkommenen Schlusse. Zuweilen wird auch der Teller abgeschraubt und statt dessen die Gefäße, in denen die Luft verdünnt werden soll, unmittelbar an das Ende der Röhre B angeschraubt. An der Communikationsröhre B und gewöhnlich auch an dem Kolben sind Vorrichtungen angebracht, welche der Luft zwar einen Ausgang aus dem Recipienten gestatten, jeden Rückgang in denselben aber verwehren, welche Vorrichtungen die Stelle der Ventile in den Wasserpumpen vertreten. — Nehmen wir zunächst an, ein solches Ventil befinde sich in der Communikationsröhre B zunächst am Stiefel, welches der Luft den Durchgang in den Stiefel durch die Röhre B hindurch gestattet, deren Rückgang in den Recipienten D aber verweigert, und ein zweites ähnliches Ventil befindet sich im Kolben, welches der Luft einen Durchgang durch ihn hindurch nach seiner äußern Seite offen hält, einen Rückgang der Luft in das Innere des Pumpenkörpers aber unmöglich macht, so ist die Wirkungsweise der Verdünnungspumpe leicht einzusehen. Denken wir uns nämlich den Kolben auf dem Boden des Stiefels stehend und hierauf in die Höhe gezogen, so entsteht zwischen dem Kolben und dem Boden des Stiefels ein luftverdünnter Raum, in welchen sich die äußere Luft nicht stürzen kann, weil sie durch das Ventil im Kolben davon abgehalten wird; aber das Ventil in der Röhre B erlaubt der Luft im Recipienten in diesen leeren Raume überzugehen bis der Druck der Luft in ihm dem im Recipienten gleich und dadurch die Luft im Recipienten verdünnter geworden ist. Wird nun der Kolben auf den Boden des Stiefels zurückgestoßen, so kann er die vor ihm liegende Luft nicht in die Röhre B, in Folge

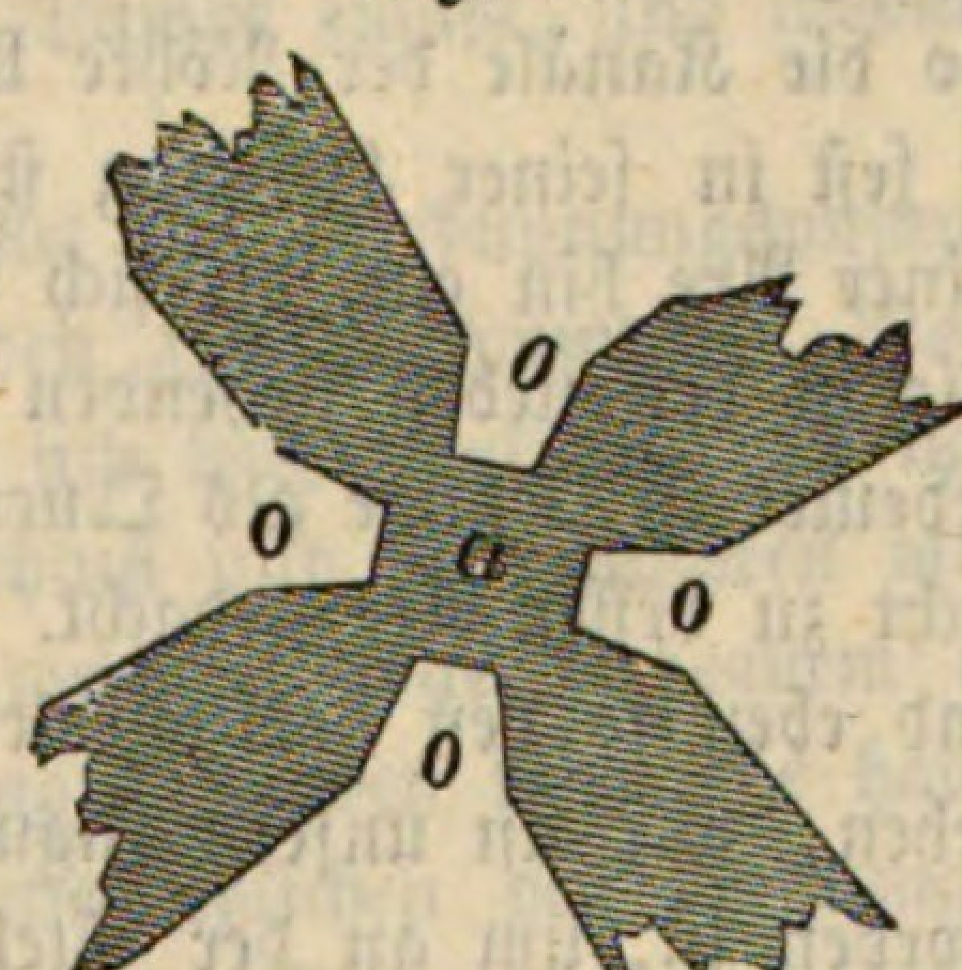
Fig. 54.



des an dieser angebrachten Ventils zurücktreiben, sonach auch nicht in den Recipienten D, worin sie ihre zuvor erlangte Verdünnung beibehält; wohl aber wird diese Luft, wenn ihr Druck groß genug geworden ist, sich einen Ausgang durch den Kolben hindurch, dessen Ventil sie nicht davon abhält, nach dessen äußerer Seite eröffnen, bis der Kolben wieder auf dem Boden des Stiefels steht. Ein wiederholtes Auf- und Abbewegen des Kolbens im Stiefel wird auf die gleiche Weise immer neue Verdünnungen der Luft im Recipienten bewirken müssen, bis zu einer gewissen Grenze hin, von der die Güte der Verdünnungspumpe abhängt.

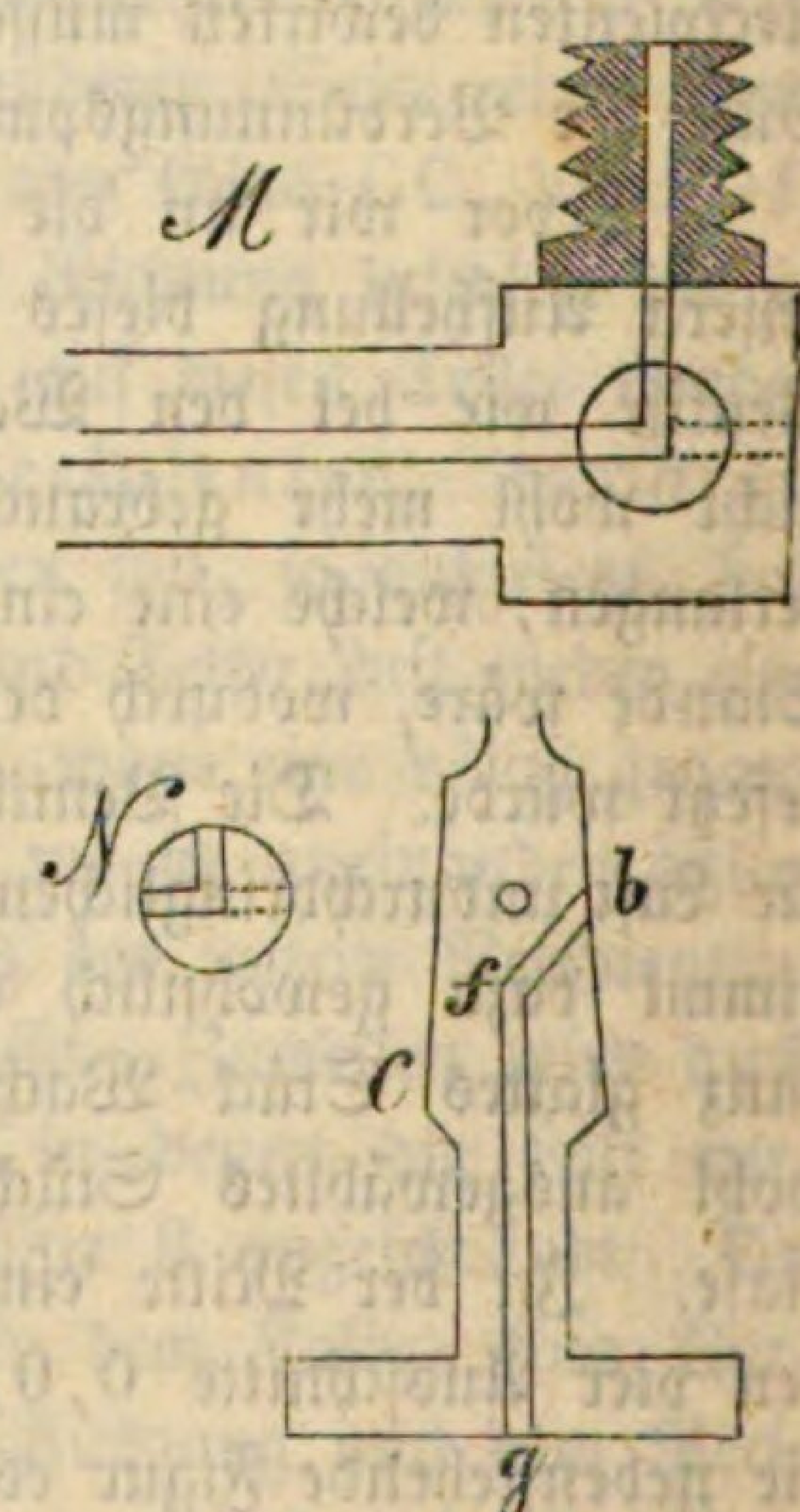
Bevor wir an die Bestimmung dieser Grenze gehen, müssen wir zur bessern Aufhellung dieses Gegenstandes noch einige Punkte näher besprechen. Ventile wie bei den Wasserpumpen können bei diesen Verdünnungspumpen nicht wohl mehr gebraucht werden, weil diese zu ihrer Hebung eine Kraft verlangen, welche eine einigermaßen verdünnte Luft nicht mehr herzugeben im Stande wäre, wodurch der Güte der Verdünnungspumpe eine zu frühe Grenze gesetzt würde. Die Ventile werden daher bei ihr aus den leichtesten und doch für Luft undurchdringlichen Körpern gebildet, welche sich auftreiben lassen; man nimmt dazu gewöhnlich ein nicht klebriges und ganz glattes Stück Wachstaffet, oder ein dazu wohl ausgewähltes Stück von einer Schweinsblase. In der Mitte eines solchen Stückes werden vier Ausschnitte 0,0,0,0, ohngefähr so wie die nebenstehende Figur es sehen läßt, angebracht, oder auch nur neben der mittleren Stelle a zwei parallele Einschnitte gemacht. Das so hergerichtete Stück wird auf die Seite des Theils der Pumpe, von welcher der Lufteintritt abgehalten werden soll, möglichst glatt so aufgelegt, daß die Stelle a mitten über den durch diesen Theil der Pumpe gebohrten Kanal zu liegen kommt; hierauf wird der äußere Rand des Stückes, wenn auch nur stellenweise, über den erwähnten Theil der Pumpe umgebogen und hier fest gebunden, so daß der Theil a sich nicht über den Kanal wegschieben kann. Will nun Luft von der Seite des Ventils in den Kanal eindringen, so drückt sie selber die Stelle a gegen ihn an und versperrt sich damit einen möglichen Durchgang; will die Luft aber von der anderen Seite her einen Durchgang gewinnen, so hebt sie fast ohne alle Kraft die Stelle a des Ventils in die Höhe und verschafft sich dadurch einen hinreichenden Ausgang. Man überzeugt sich indessen bald, daß damit allein noch nicht alles gethan ist. Hat man nämlich mittelst einer solchen Verdünnungspumpe die Luft im Recipienten bis zu einem gewissen höhern Grade verdünnt, so wird dieser von der äußern Luft mit solcher Kraft gegen den Teller angedrückt, daß man ihn ohne Gefahr des Zerbrechens nicht

Fig. 55.



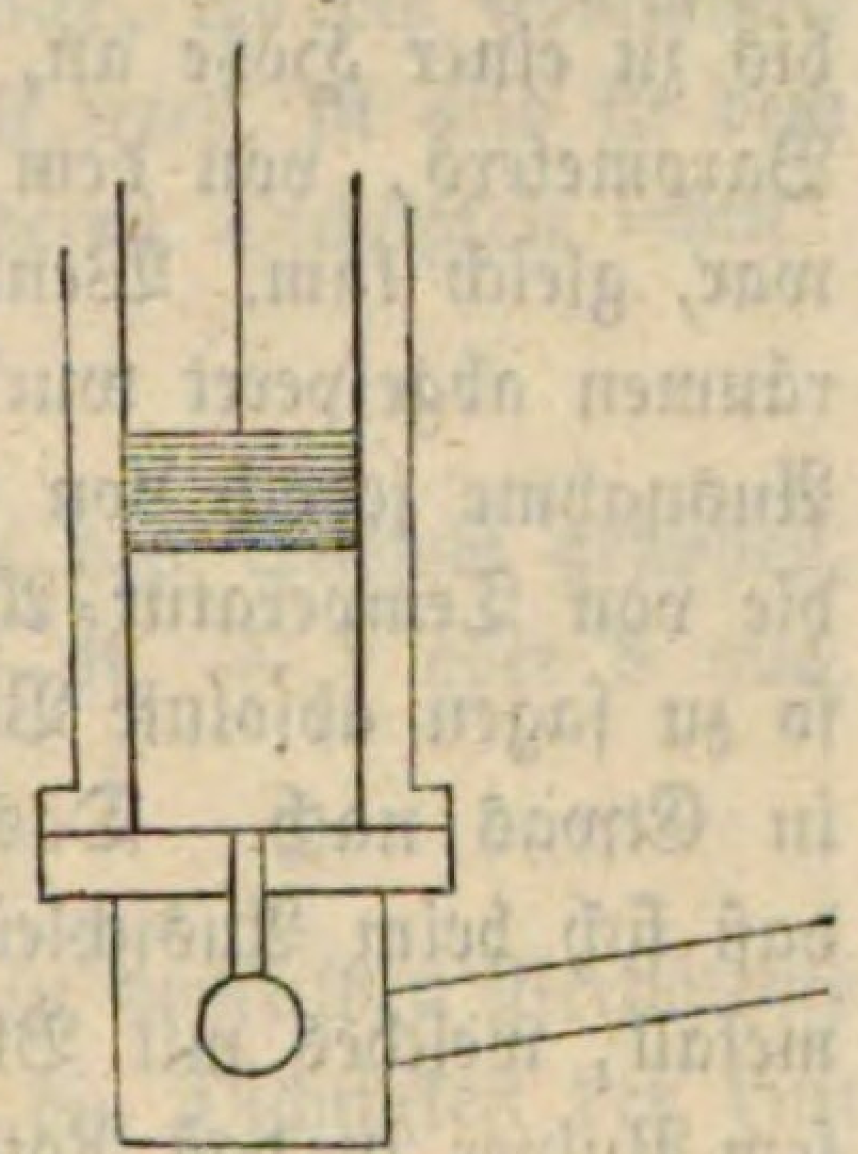
mehr los machen kann; man muß sich daher ein Mittel offen halten, die äußere Luft wieder in den Recipienten treten zu lassen, worauf dann sein Abnehmen mit Leichtigkeit geschehen kann. Ein solches Mittel ist zwar durch Abschrauben des Tellers von der Röhre B (Fig. 54.) gegeben, es hat dieß aber große Schwierigkeiten schon deßwegen, weil der sichere Verschluß zwischen der Röhre und dem Teller ein Festschrauben mit sehr großer Kraft verlangt. Man hat deßwegen zu diesem Zwecke das folgende Mittel ersonnen, welches unter dem Namen Wechselhahn bekannt geworden ist. Man läßt gleich von vorne herein an die Communikationsröhre B ein würfelförmiges Stück zunächst der Stelle, wo der Teller angeschraubt wird, angießen, arbeitet in dasselbe parallel mit dem Teller eine Höhlung von der Form eines abgestumpften Kegels ein und bohrt hierauf die der Röhre B nothwendigen Kanäle aus. In diese Höhlung schleift man einen genau in sie passenden massiven abgekürzten Kegel, den Hahn, luftdicht ein und bohrt in diesen an den Stellen, wo die Kanäle der Röhre B auf ihn stoßen, wenn er fest in seiner Höhlung steckt, Kanäle bis nach seiner Axe hin ein, die sich einander hier begegnen, wie in den neben stehenden Figuren M und N angedeutet ist, letztere als Querschnitt des Hahns senkrecht zu dessen Axe gedacht. Meistens läßt man die eine Bohrung des Hahns und eben so den horizontalen Kanal der Communikationsröhre ganz hindurch gehen, wie an unsern Figuren M und N durch punktirte Linien versinnlicht worden ist, um an der Stelle c eine lothrecht herabgehende, an ihren beiden Enden offene Glasröhre luftdicht anzubringen, deren unteres Ende in ein Gefäß mit Quecksilber taucht, das in ihr ansteigt, in dem Maaße als die Luft in ihr verdünnter wird, und durch seine Höhe den Grad der Luft-Verdünnung in der Pumpe zu erkennen gibt. In diesen Hahn bohrt man noch von der Stelle b aus (siehe die durch C bezeichnete Figur), welche der nach dem Teller hinführenden Bohrung des Hahns gerade gegenüber liegt, einen Kanal b f ein, welcher schief zur Axe des Hahns steht, bis an diese reicht, aber zwischen den vorigen Bohrungen noch einige Linien Fleisch stehen läßt, und zuletzt bohrt man noch längs der Axe des Hahns den Kanal g f ein, bis dieser und der b f einander an der Stelle f begegnen. Man sieht nun leicht ein, daß dieser Hahn, wenn man ihn aus seiner gewöhnlichen Stellung um 180 dreht, die äußere Luft in den Recipienten D eindringen läßt, wodurch der oben erwähnte Zweck einfach und leicht erreicht wird. Eine so eingerichtete Verdünnungspumpe wird Ventilluftpumpe genannt.

Fig. 56.



Es war indessen nicht schwer einzusehen, daß ein solcher Wechselhahn die Ventile ganz entbehrlich macht, und eine Luftpumpe, welche mit gar keinem Ventil versehen ist, nennt man eine Hahn-Luftpumpe. Bei dieser ist es vortheilhaft, das eben beschriebene Würfelstück dicht unter dem Stiefel der Pumpe anzubringen, wie in der nebenstehenden Fig. 57. vor Augen gelegt ist. Steht der Kolben am Boden des Stiefels und ist der Hahn im Würfelstück so gestellt, daß er den Kanal vom Stiefel zum Recipienten offen erhält, so verdünnt sich die Luft in diesem in dem Maaße, als man den Kolben im Stiefel hebt. Wird nun der Wechselhahn C (Fig. 56.) um 180° gedreht, so daß sein Kanal bfg den Stiefelraum mit der äußern Luft in Verbindung setzt, so treibt der Kolben während seines Niedergangs zum Boden des Stiefels alle Luft vor sich her durch den Kanal bfg hindurch. Ein abwechselndes Heben und Senken des Kolbens, verbunden mit einer abwechselnd veränderten Stellung des Hahns treibt allmählig die Verdünnung der Luft im Recipienten bis auf den Grad hin, den die Beschaffenheit der Pumpe zuläßt, und wodurch die Güte derselben bestimmt wird.

Fig. 57.



Man blieb lange darüber uneinig, welcher Art von Verdünnungspumpen der Vorzug zu geben sei, ob den Ventil- oder den Hahnluftpumpen. Beide führen Uebelstände mit sich. An die Ventile setzt sich leicht Oel an, das nach und nach immer zäher wird, und dann deren Schluß und Beweglichkeit mindert. Die Hähne müssen hin und her gedreht werden, was unbequem ist, jedoch leicht einem einfachen Mechanismus übertragen werden kann; sie haben aber noch außerdem den Fehler, daß sie sich gerne zwischen den Bohrungen abnützen und dann weniger gut schließen. Läßt sich indessen das letztgenannte Uebel auf die Weise entfernen, von der ich sogleich reden werde, so ist wohl kein Zweifel, daß die Hahnluftpumpen den Vorrang vor den Verdünnungspumpen mit Ventilen verdienen.

Man wurde bald gewahr, daß das Auspumpen der Luft erleichtert wird, wenn man die Pumpen mit zwei Stiefeln versieht, deren Kolben stets in entgegengesetzter Thätigkeit begriffen sind, und die neueren mechanischen Künstler haben dazu noch die Einrichtung gefügt, daß jeder Kolben sowohl bei seinem Aufsteigen wie bei seinem Niedersteigen eine Verdünnung der Luft im Recipienten bewirkt. Luftpumpen mit zwei Stiefeln nennt man zweistiefelige und solche, deren Kolben sowohl beim Hingang wie bei Hergang Verdünnung der Luft im Recipienten bewirken, doppeltwirkende. Ich hatte als Vorstand der polytechnischen Schule in Nürnberg Gelegenheit durch den sehr geschickten Mechaniker jener Anstalt, Herrn Professor Michael Bauer,

eine zweistieflige und doppeltwirkende Hahnluftpumpe anfertigen zu lassen, die größte vielleicht bis jetzt vorhandene, denn jeder von ihren Stiefeln hat 4 Zoll innere Weite und 18 Zoll Höhe. In der mit dieser Pumpe versehenen Glasröhre stieg, wenn der Recipient möglichst stark entleert war, das Quecksilber bis zu einer Höhe an, die genau der Quecksilberhöhe eines alten Brander'schen Barometers, von dem ich jedoch nicht behaupten will, daß es völlig luftfrei war, gleich kam. Wenn der Recipient stark ausgepumpt und von den Stiefelräumen abgesperrt wurde, so blieb das Quecksilber wochenlang unverrückt, mit Ausnahme jedoch von sehr geringen Schwankungen, vorwärts und rückwärts, die von Temperatur-Aenderungen herrührten, auf seiner Stelle stehen. Dieser so zu sagen absolute Verschluß ließ jedoch nach längerem Gebrauche der Pumpe in Etwas nach. Das geübte Auge unseres Mechanikers fand bald heraus, daß sich beim Ausschleifen der stählernen Hähne in den Würfeln von Rothmetall, welches mit Blausteinpulver geschah, eine geringe Quantität von diesem Pulver in das Rothmetall eindrücke, das durch kein Reinigen zu entfernen sei, später aber namentlich an Stellen, wo sich Oel ansammeln kann, wieder an die Oberfläche gelange, und dann den Hähnen ihre Vollkommenheit nehme. Derselbe nahm sich vor, die Würfel von Rothmetall mit gedrückten Glasröhren, in welche die Hähne eingeschliffen werden sollten, auszufüttern, weil er davon Abhilfe jenes Uebelstandes erwartete, starb jedoch leider, noch ehe er diesen Versuch ausgeführt hatte. Ich lege diese Thatsache hier nieder, weil, wenn die Vermuthung des Verstorbenen sich rechtfertigen sollte, sie eine für den Bau der Verdünnungspumpen hochwichtige Entdeckung wäre.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, den Effekt der Verdünnungspumpen theoretisch zu bestimmen, um so dem Meisterstück der praktischen Mechanik gleichsam eine geistige Weihe zu ertheilen.

Zu diesem Ende soll R_1 den Raum bezeichnen, den der Kolben durchläuft, während er im Stiefel der Pumpe von dessen einem Ende bis zum andern sich hinbewegt; ferner soll R_2 den Raum vorstellen, den das Gefäß, in welchem die Luft verdünnt werden soll, in Verbindung mit den Röhrenkanälen bis zum Ventil hin, wenn man es mit einer Ventilluftpumpe zu thun hat, oder bis zum Wechselhahn hin einnimmt, wenn man eine Hahnluftpumpe vor sich hat. Hat das Spiel der Pumpe schon eine Weile gedauert und denken wir uns den Kolben auf dem Boden des Stiefels aufsitzend, so wird die Luft im Raume R_2 schon einen gewissen Grad der Verdünnung erreicht haben, wir wollen ihre Dichtigkeit durch D bezeichnen, aber der zwischen dem Kolben und Röhrenventil oder Hahn vorhandene Raum, den man den schädlichen nennt und der durch r bezeichnet werden mag, enthält Luft von der Dichtigkeit der äußern, die wir 1 nennen wollen, in sich, wie daraus hervorgeht, daß der Kolben während seiner Bewegung nach dem Boden des Stiefels zu die in diesem befindliche Luft in's Freie treibt, die äußere Luft also dabei nothwendig

in Verbindung mit dem schädlichen Raum steht. Es ist also die im Raume $R_2 + r$ enthaltene Luftmenge

$$D R_2 + r,$$

falls dieser Zahl die in der Raumeinheit enthaltene Luftmenge von der Dichtigkeit 1 als Einheit zu Grunde gelegt wird. In dem Augenblicke, wo die Communikation zwischen Recipienten und Stiefel wieder hergestellt wird, ist also in dem Raume $R_2 + r$ die Luftmenge $D R_2 + r$ enthalten, deren Dichtigkeit sohin

$$\frac{D R_2 + r}{R_2 + r}$$

ist. Wird nun der Kolben bis an das andere Ende des Stiefels gestoßen, so dehnt sich dadurch der Raum $R_2 + r$ in den $R_1 + R_2 + r$ oder S aus, wenn zur Abkürzung

$$R_1 + R_2 + r = S$$

gesetzt wird, und da sich die Dichtigkeit eines Körpers in demselben Verhältniß abändert, wie der Raum, den er einnimmt, so wäre die Dichtigkeit der Luft im Innern der Luftpumpe nach dem Aufzug des Kolbens

$$\frac{R_2 + r}{S} \cdot \frac{D R_2 + r}{R_2 + r} \quad \text{oder} \quad \frac{D R_2 + r}{S},$$

wenn alle Verbindungen in der Luftpumpe wirklich luftdicht wären, wie sie bisher von uns vorausgesetzt worden sind; weil aber die Bearbeitung der Luftpumpe wohl nie so fehlerfrei ist, daß sich nicht einige Luft von außen in das Innere der Pumpe ziehen könnte *), so müssen wir annehmen, daß nach geschehenem Kolbenzuge außer der Luftmenge $D R_2 + r$ noch eine unbekannte Menge z sich eingeschlichen habe, wodurch die Dichtigkeit der innern Luft eine andere, nämlich $\frac{D R_2 + r + z}{S}$ wird. Bezeichnen wir diese wahre, nach Beendigung eines Kolbenzuges vorhandene Dichtigkeit durch D', so ist also

$$D' = \frac{D R_2 + r + z}{S}, \qquad (1. a.)$$

Um nun die unbekannte Luftmenge z doch einigermaßen näher zu bestimmen, machen wir darauf aufmerksam, daß im Falle die innere und äußere Luft einerlei Dichtigkeit hat, kein Grund zu einem Uebergange der einen zur andern vorhanden ist, daß aber das Streben darnach in dem Grade wächst, als der Unterschied in der Dichtigkeit zwischen der innern und äußern Luft größer wird; wir sind daher, wenigstens unter Voraussetzung einer guten Luftpumpe, berechtigt, die Menge z der eindringenden Luft dem Unterschiede zwischen den Dichtigkeiten der äußern und innern Luft proportional zu setzen.

*) Dieses Eindringen von äußerer Luft findet namentlich zwischen Kolben und Stiefelwand statt, kann aber auch an den Ventilen und Hähnen, ja sogar durch nicht ganz dicht gegossenes Metall hindurch eintreten.

Nun ist die Dichtigkeit der äußern Luft $= 1$ und die der innern Luft würde ohne das Einzwängen der äußern während des Kolbenzuges von der Größe $\frac{D R_2 + r}{R_2 + r}$ bis zu der $\frac{D R_2 + r}{S}$ laufen, sonach deren Mittelwerth $\frac{1}{2} (D R_2 + r) \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{R_2 + r}\right)$ sein, demnach können wir setzen:

$$z = \left[1 - \frac{1}{2} (D R_2 + r) \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{R_2 + r}\right)\right] k,$$

wo k die Luftmenge bedeutet, welche sich in's Innere der Luftpumpe während eines Kolbenzuges schleichen würde, wenn dieses völlig luftleer wäre. Diese Luftmenge wird allerdings um so größer, je langsamer die Pumpenbewegung geschieht, wir können indessen dieses Element der Veränderlichkeit dadurch umgehen, daß wir eine stets gleichmäßige Pumpenbewegung zur Bedingung machen. Setzen wir den so bestimmten Werth von z in die Gleichung (1. a.), so erhalten wir

$$D' = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} k}{S} - \frac{\frac{1}{2} k}{R_2 + r}\right) \frac{D R_2 + r}{S} + \frac{k}{S}. \quad (1. b.)$$

In dieser Gleichung sind alle Eigenthümlichkeiten der Verdünnungspumpe enthalten, wie noch gezeigt werden soll. Setzen wir in der Gleichung (1. b.) zur Abkürzung

$$1 - \frac{k}{2 S} - \frac{k}{2 (R_2 + r)} = \mu, \quad (2. a.)$$

so wird sie:

$$D' = \mu \frac{D R_2 + r}{S} + \frac{k}{S}, \quad (2. b.)$$

und gehen wir von der Voraussetzung aus, daß sich anfänglich in der Pumpe Luft von der Dichte 1 befinde, so ist beim ersten Zuge $D = 1$, und dann liefert D' die Dichte der innern Luft nach dem ersten Zuge, welche wir durch D_1 bezeichnen wollen; es ist folglich

$$D_1 = \mu \frac{R_2 + r}{S} + \frac{k}{S}. \quad (3. a.)$$

Vor dem zweiten Zuge hat D den Werth D_1, stellt also D_2 die Dichte der Luft nach dem zweiten Zuge vor, so ist

$$D_2 = \mu \frac{D_1 R_2 + r}{S} + \frac{k}{S},$$

oder wenn man für D_1 seinen Werth aus (3. a.) einsetzt:

$$D_2 = \frac{\mu^2}{S^2} R_2 (R_2 + r) + \frac{\mu}{S} \left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) + \frac{k}{S}. \quad (3. b.)$$

Vor dem dritten Zuge hat D den Werth von D_2, stellt daher D_3 die Dichte der innern Luft nach dem dritten Zuge vor, so wird:

$$D_3 = \frac{\mu}{S} \left(D_2 R_2 + r\right) + \frac{k}{S},$$

oder wenn man für D_2 seinen Werth aus (3. b.) einsetzt:

$$D_3 = \frac{\mu^3}{S^3} R_2^2 (R_2 + r) + \frac{\mu^2}{S^2} R_2 \left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) + \frac{\mu}{S}\left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) + \frac{k}{S}. \quad (3.c.)$$

So fortfahrend läßt sich die Dichtigkeit der innern Luft nach jeglichem Kolbenzuge angeben und man findet, wenn $\triangle$ die nach dem n^{ten} Zuge vorstellt:

$$\triangle = \frac{\mu^n}{S^n} R_2^{n-1} (R_2 + r) + \left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) \left[\frac{\mu^{n-1}}{S^{n-1}} R_2^{n-2} \cdots\cdots + \frac{\mu}{S}\right] + \frac{k}{S}$$

oder:

$$\triangle = \frac{\mu^n}{S^n} R_2^n \left(1 - \frac{k}{S}\right) + \left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) \left[\frac{\mu^n}{S^n} R_2^{n-1} + \frac{\mu^{n-1}}{S^{n-1}} R_2^{n-2} \cdots + \frac{\mu}{S}\right]$$

$$+ \frac{k}{S}. \quad (4.\,a.)$$

In dieser Gleichung bildet aber der in eckige Klammern eingeschlossene Factor eine geometrische Progression, deren Summe

$$\frac{\mu}{S} \cdot \frac{1 - \frac{\mu^n}{S^n} R_2^n}{1 - \frac{\mu}{S} R_2}$$

ist, und hiedurch geht die Gleichung (4. a.) über in:

$$\triangle = \frac{\mu^n}{S^n} R_2^n \left(1 - \frac{k}{S}\right) + \frac{k}{S} + \left(\frac{k}{S} R_2 + r\right) \frac{\mu}{S} \frac{1 - \frac{\mu^n}{S^n} R_2^n}{1 - \frac{\mu}{S} R_2}, \quad (4.\,b.)$$

und ist so ganz geeignet, einen sichern Blick in die ziemlich verwickelte Wirkungsweise der Verdünnungspumpen zu gestatten. Da nämlich R_2 stets kleiner als S ist, so wird $\frac{R_2}{S}$ immer ein ächter Bruch, es nimmt also $\frac{R_2{}^n}{S^n}$ oder $\left(\frac{R_2}{S}\right)^n$ einen beliebig kleinen Werth an, wenn man die Anzahl der Kolbenzüge n groß genug werden läßt. Unter dieser Voraussetzung darf man also $\frac{R_2{}^n}{S^n}$ in der Gleichung (4. b.) vernachlässigen, und dann wird sie:

$$\triangle = \frac{k}{S} + \frac{\mu\left(\frac{k}{S} R_2 + r\right)}{S - \mu R_2}. \quad (5.)$$

Läßt man in dieser Gleichung $k = o$ und diesem zur Folge $\mu = 1$ werden, und bezeichnet man den dieser Supposition entsprechenden Werth von

$\triangle$ durch $\triangle_\circ$, so wird

$$\triangle_\circ = \frac{r}{S - R_2} = \frac{r}{R_1 + r} \quad . \quad (6.)$$

Es hält auch ohne alle Künsteleien nicht schwer, den schädlichen Raum r so klein zu machen, daß die Dichtigkeit $\triangle_\circ$ das Quecksilber in der Barometerröhre noch lange nicht um $\frac{1}{10}$ Linie herabzudrücken vermag. Die Unvollkommenheit solcher Pumpen liegt also nicht in der Größe r, sondern in der k, welche man die Unvollkommenheit der Bearbeitung nennen könnte. Zieht man von der Gleichung (5.) die (6.) ab, so erhält man:

$$\triangle - \triangle_\circ = \frac{k}{S - \mu R_2} - \frac{S}{S - \mu R_2}(1 - \mu)\triangle_\circ \,, \quad (7.a.)$$

wofür man unbedenklich blos

$$\triangle - \triangle_\circ = \frac{k}{S - \mu R_2} \quad (7.b.)$$

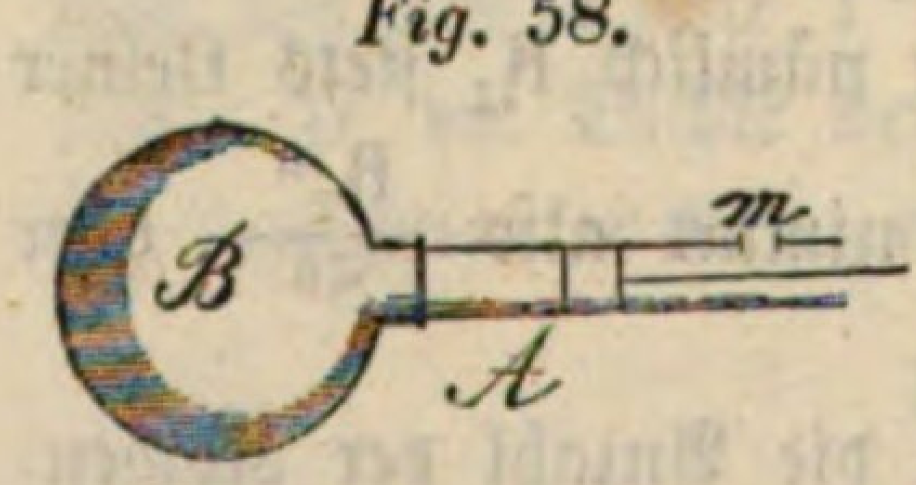
setzen kann, und es stellt $\triangle - \triangle_\circ$ die von der Unvollkommenheit der Bearbeitung im Innern der Pumpe zurückbleibende Dichtigkeit der Luft vor, die sich durch den Versuch leicht ermitteln läßt, und woraus man sodann die Größe k ableiten kann.

§. 39. Verdichtungspumpe.

Wir schließen nun unsere Betrachtungen über Pumpen mit der einfachsten von allen, nämlich

4) mit der Verdichtungspumpe. Diese besteht aus einem Pumpenkörper ähnlich den früheren, der aber, wenn die Verdichtung der Luft durch eines Menschen Kraft weit getrieben werden soll, von viel geringeren Dimensionen genommen werden muß. In der Regel giebt man bei ihnen dem Stiefel nur eine innere Weite von wenigen Linien. Dieser Stiefel sammt seinem Kolben wird an die Gefäße, in denen die Luft verdichtet werden soll, luftdicht angeschraubt, wie durch nebenstehende Fig. 58. veranschaulicht worden ist, wo A den Pumpenkörper und B das Verdichtungsgefäß vorstellt. Im Halse des Gefäßes B ist ein Ventil angebracht, das der Luft einen Eingang in das Gefäß gestattet, jeden Ausgang aber verwehrt. Im Kolben des Pumpenkörpers befindet sich bei dieser Pumpe meistens kein Ventil, dafür aber ist im Stiefel eine Oeffnung m gerade unter dem Kolben, wenn dieser an dem äußern Ende des Stiefels ansteht, eingebohrt. Diese Pumpe nun arbeitet wie folgt. Ist der Kolben bis an das Ende des Stiefels herausgezogen, so füllt sich dieser mittelst der Oeffnung m mit Luft von der Dichtigkeit der äußern an. Wird nun der Kolben gegen das Gefäß B zurückgestoßen, so wird diese, sobald er über die Oeffnung m hinweggekommen ist, mehr und mehr verdichtet und dringt in das Gefäß B ein, so wie ihr

Fig. 58.



Druck den der darin befindlichen Luft überwiegt. Beim Zurückziehen des Kolbens entsteht hinter ihm ein luftverdünnter Raum, in den sich keine Luft aus dem Gefäße B stürzen kann, dem in dessen Halse angebrachten Ventile zur Folge, wohl aber dringt in diesen Raum die äußere Luft ein, sobald der Kolben über die Stelle m weggekommen ist. Auf gleiche Weise wird bei jedem neuen Spiele des Kolbens mehr Luft in das Gefäß B hineingetrieben werden, bis die Kraft, welche den Kolben bewegt, nicht mehr im Stande ist, die Luft im Stiefelraume so stark zu verdichten, als zur Oeffnung des Ventils im Gefäßhalse erforderlich ist.

Kennt man die Kraft, womit der Kolben in den Stiefelraum hinabgetrieben wird, so ist es leicht, die Grenze der Verdichtung der Luft im Gefäße B zu berechnen, wobei wir die Reibung des Kolbens an der Stiefelwand, so wie etwaige Hindernisse am Ventile außer Acht lassen werden. Ist nämlich k die Kraft, womit der Kolben die Luft im Stiefel zusammenpreßt und ihr die Dichtigkeit d ertheilt (die der äußern Luft = 1 gesetzt), so ist

$$k = f d H \alpha\,, \qquad (1.)$$

wenn f die Größe der Kolbenfläche, H die Barometerhöhle und α das Gewicht einer Raumeinheit Quecksilber vorstellt. Dieser Druck des Kolbens pflanzt sich bis zum Ventile fort und übt auf dieses, wenn es dem Stiefelraum die Flächengröße f zuwendet, eine im Verhältniß $\frac{f}{f}$ veränderte Kraft aus, welche

$$f d H \alpha$$

wird. Ist die Dichtigkeit der Luft im Gefäße d′ und die nach der Seite dieses Gefäßes gekehrte Flächengröße des Ventils f′, so ist der Druck der im Gefäße befindlichen Luft gegen das Ventil

$$f' d' H \alpha\,,$$

es wird also das Ventil sich nicht mehr öffnen können, so wie d′ groß genug geworden ist, um

$$f' d' = f d \qquad (2.)$$

werden zu lassen. Setzt man in diese Gleichung für d seinen Werth aus der Gleichung (1.), so wird sie

$$f' d' = \frac{f}{f} \; \frac{k}{H\alpha}$$

und giebt nun

$$d' = \frac{f}{f'} \; \frac{k}{f H \alpha} = \frac{f}{f'} d\,. \qquad (3.)$$

Es ist aber der Natur der Sache nach $\frac{f}{f'}$ stets kleiner als 1, kann jedoch der Einheit sehr nahe gebracht werden, darum ist d′ zwar stets, jedoch nicht um Vieles kleiner als d; dieses jedoch wird in demselben Verhältniß größer als die Flächengröße f des Kolbens kleiner wird, darum wächst auch d′

bei übrigens gleichem Bau der Verdichtungspumpe im umgekehrten Verhältnisse zur Flächengröße des Kolbens oder zum Querschnitt des Stiefels, und hieraus erklärt es sich, weßhalb starke Verdichtungen Stiefel von kleinem Querschnitt verlangen.

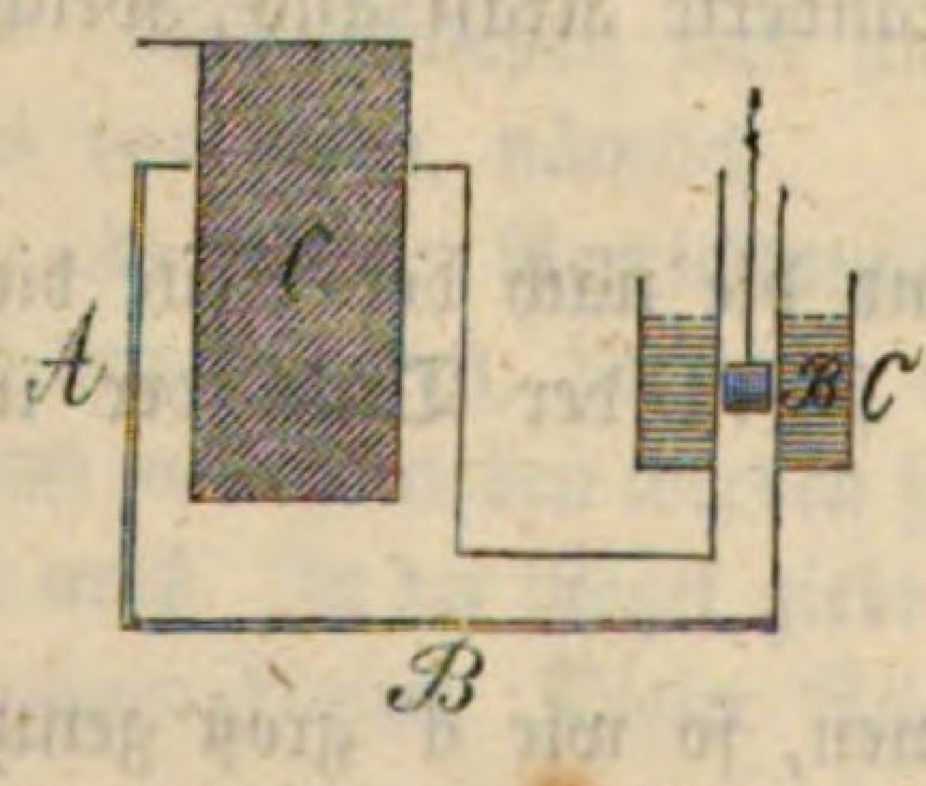
Die Kenntniß der bisher beschriebenen Pumpen ist schon darum von großer Wichtigkeit, weil deren Funktionen in einer Menge anderer Vorrichtungen wiederkehren, von denen jetzt einige mit Namen aufgeführt werden sollen:

a) die gemeine Spritze; welche beim Aufziehen ihres Kolbens wie eine Saugpumpe, beim Niederdrücken desselben wie eine Druckpumpe wirkt.

b) die Feuerspritze nach älterer Einrichtung. Diese ist nichts anders als eine Druckpumpe mit zwei Stiefeln in Verbindung mit einem lufterfüllten Gefäße, dem Windkessel, in welches die Kolben das in den Stiefeln enthaltene Wasser hineinpressen und dadurch die Luft in ihm verdichten, wodurch später das angesammelte Wasser ziemlich gleichförmig aus einer bis nahe an den Boden reichenden Röhre, mit einem beweglichen obern Theile, dem Schwanenhalse, geschleudert wird. Die Feuerspritze ist demnach nichts anders als ein mit einer Druckpumpe vereinigter Heronsball.

c) die hydraulische Presse. Diese besteht im Wesentlichen aus einem gußeisernen Gefäße A (Fig. 59.), in welches eine Seitenröhre BB mündet. In dem Gefäße A läßt sich ein Cylinder C wasserdicht auf und ab bewegen, und auf die Röhre B, welche in eine Kufe mit Wasser ausläuft, ist eine Druckpumpe aufgesetzt, mit deren Hilfe vorerst der Raum zwischen A und C mit Wasser angefüllt und hierauf der Cylinder durch den Druck des Kolbens auf das Wasser, welcher Druck sich am Cylinder im Verhältniß seines Querschnitts zur Kolbenfläche der Druckpumpe vervielfacht, in die Höhe gehoben wird, wodurch die auf eine über dem Cylinder befestigte Platte gelegten Waaren gegen eine darüber befindliche feste Wand angepreßt werden. Es ist klar, daß die Wirkung einer solchen Presse um so größer wird, je größer der Querschnitt des Cylinders C, je kleiner die Kolbenfläche der Druckpumpe und je größer die auf diesen Kolben wirkende Kraft ist. Um diese letztere Kraft zu verstärken, wird die Kolbenstange nicht unmittelbar, sondern mittelst eines Hebelwerks in Bewegung gesetzt. Diese hydraulischen Pressen eignen sich vorzüglich für solche Sachen, die nach und nach einen immer stärker werdenden Druck verlangen.

Fig. 59.



d) die Windbüchse besteht aus einem Flintenlaufe, an den, die Stelle des Kolbens vertretend, ein hinreichend starkes Gefäß luftdicht angeschraubt wird. Die Luft in diesem Gefäße wird mittelst einer Verdichtungspumpe stark verdichtet. Wird nun in den Flintenlauf eine Kugel gelegt und ein in dem

Gefäße angebrachtes, gegen den Flintenlauf gekehrtes Ventil auf einen Augenblick geöffnet, so wirft der von dieser Seite kommende sehr große Druck die Kugel mit beträchtlicher Geschwindigkeit zum Laufe hinaus, ähnlich wie es die aus dem entzündeten Schießpulver sich entwickelnden Gasarten thun. Man kann so aus der Windbüchse wiederholte jedoch stets schwächer werdende Schüsse thun. Die Windbüchsen haben zu vielen Unglücksfällen Anlaß gegeben, dadurch, daß in deren Gefäßen die Luft stärker verdichtet worden ist, als sie zu ertragen vermochten, und diese in Folge davon explodirten. Deren Verfertiger geben zwar insgemein die Anzahl der Stöße an, womit die Luft im Gefäße ohne Gefahr comprimirt werden darf; allein diese Vorsichtsmaßregel ist bei der Sorglosigkeit der Menschen und ihrer Neigung zum Uebertreiben unzureichend. Besser wäre es jedenfalls, wenn bei der Anfertigung von Windbüchsen darauf gesehen würde, daß deren Gefäße stark genug und die Kolben der dazu gelieferten Verdichtungspumpen groß genug gemacht werden, um eine Ueberladung auch ohne die Angabe der Anzahl von Kolbenstößen unmöglich werden zu lassen, wozu die oben angegebene Berechnung solcher Pumpen ein sicheres Mittel bietet.

Es ist unmöglich, alle Anwendungen der physikalischen Gesetze einzeln aufzuführen, weßhalb wir gezwungen sind, der Anführung solcher Beispiele eine frühe Grenze zu setzen und alle diejenigen zu übergehen, welche eine gar zu particuläre Beschaffenheit besitzen, oder eine fast unmittelbare Benützung jener Gesetze in sich aufnehmen. Aus diesem Grunde zählen wir auch die guten Dienste nicht einzeln auf, welche die Verdünnungspumpe in vielen Fällen der Wissenschaft und dem Leben leistet.

Kapitel VII.

Vom Verhalten der festen Körper in flüssigen.

---

§. 40. Satz des Archimedes und vom Metacentrum.

Stellt man sich im Innern einer ruhenden Flüssigkeit einen Theil derselben von beliebiger Form in ideellen Grenzen eingeschlossen vor, so wird dieser offenbar durch den Druck der ihn umgebenden Flüssigkeit im Gleichgewicht erhalten; der Druck auf diese Grenzen ist mithin von solcher Art, daß er neben dem Bestreben den begrenzten Raum in engere Grenzen zu bringen, noch die Fähigkeit in sich enthält, die Gewichte aller in diesem Raum befindlichen materiellen Theile, d. h. das Gewicht der ganzen in jenen Grenzen eingeschlossenen

Flüssigkeit zu tragen. Denkt man sich nun an die Stelle des begrenzten Theils der Flüssigkeit einen festen Körper, der genau die gleiche Begrenzung hat, gesetzt, so wird die ihn umgebende Flüssigkeit ganz denselben Druck auf dessen Grenzen ausüben, wie zuvor auf die eben so begrenzte Flüssigkeit; es wird also der feste Körper zunächst in jeder bestimmten Tiefe eine von allen Seiten gleiche Zusammendrückung erleiden, die in dessen Vermögen, seine Gestalt unverändert zu erhalten, untergeht, außerdem aber wird noch eine Kraft in lothrechter Richtung von unten nach oben auf ihn einwirken, deren Größe dem Gewichte einer mit ihm völlig gleiche Gestalt habenden Flüssigkeitsmasse gleich kommt, und deren Richtung durch den Schwerpunkt dieser Flüssigkeitsmasse geht, wenn man sich dieselbe an die Stelle des festen Körpers gesetzt denkt. Dieser Satz läßt sich mit andern Worten kürzer so aussprechen: Einem unter eine Flüssigkeit getauchten festen Körper setzt sich eine seinem Gewichte gerade entgegensetzte Kraft entgegen, deren Größe das Gewicht einer in dieselben Grenzen wie er eingeschlossenen Flüssigkeit von der derselben Art, wie die ihn umgebende, ist. In diesem einen Satze spricht sich das ganze Verhalten von festen Körpern in flüssigen aus.

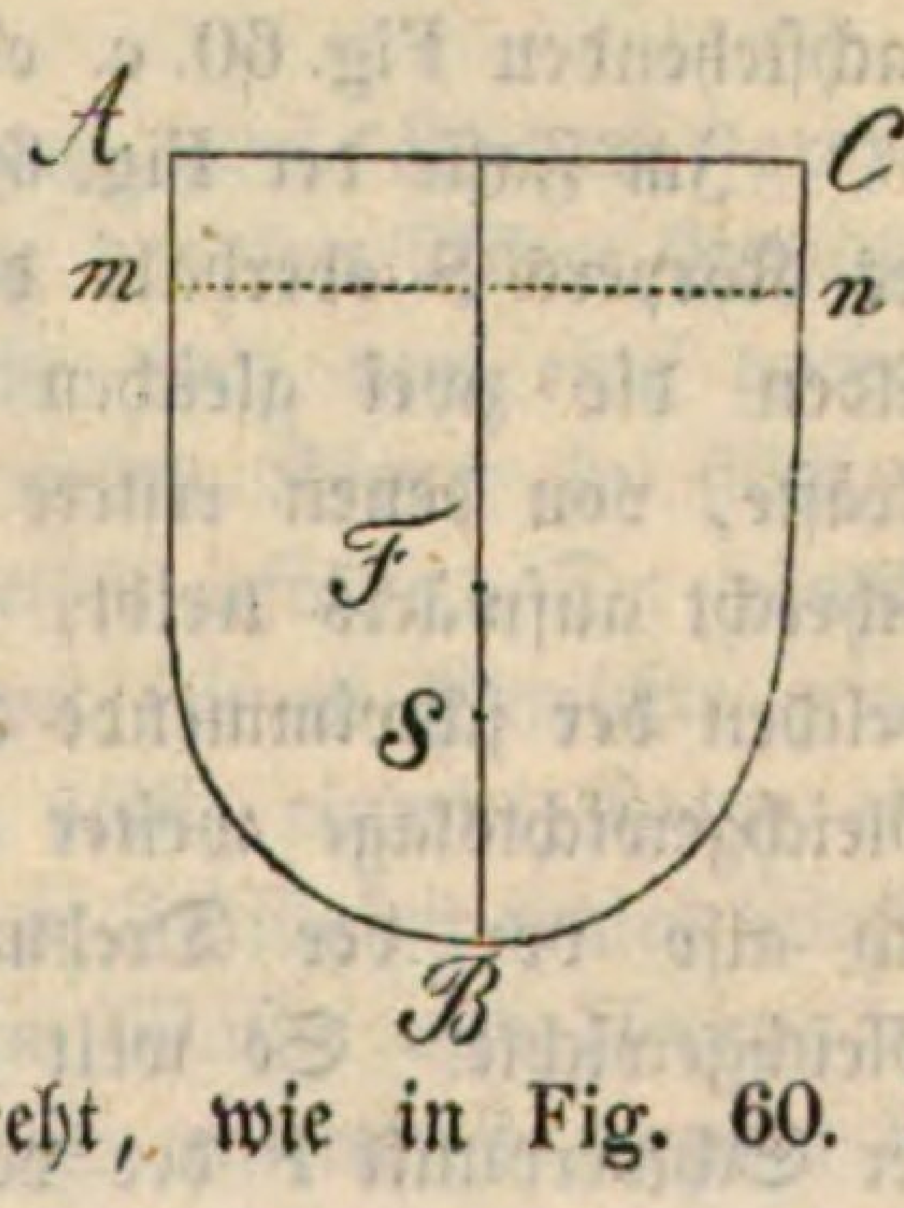
Zuvörderst geht aus dem soeben gewonnenen Satze, den man den Satz des Archimedes zu nennen pflegt, hervor, daß in dem Falle, wo das Gewicht des untergetauchten festen Körpers größer ist, als das Gewicht eines mit ihm völlig gleich großen Raumes von der Flüssigkeit, in die er untergetaucht worden ist, der feste Körper mit dem Unterschiede der beiden Gewichte sich in lothrechter Richtung abwärts bewegen werde, was man sein Untersinken in der Flüssigkeit nennt; sind aber diese beiden Gewichte einander völlig gleich, so wird der feste Körper kein Bestreben, in der Flüssigkeit sich zu bewegen, zeigen, und man sagt dann, er schwebe in der Flüssigkeit; ist endlich das Gewicht des festen Körpers kleiner als das der Flüssigkeit von gleichem Raume, so wird er sich mit dem Unterschiede dieser beiden Gewichte in lothrechter Richtung aufwärts bewegen, was sein Aufsteigen in der Flüssigkeit heißt. Ist er in diesem letzten Falle bis zur Berührung mit der Oberfläche der Flüssigkeit gekommen, so wird ihn auch hier noch dieselbe Kraft aufwärts treiben; er wird deßhalb aus der Flüssigkeit hervortreten, und nach kurzem pendelartigen Auf- und Abbewegen an der Oberfläche der Flüssigkeit zur Ruhe gelangen, wobei sein Gewicht genau dem der Flüssigkeitsmasse gleich ist, die von der Oberfläche der Flüssigkeit, worin er liegt, und seiner unterhalb derselben liegenden Umgrenzung eingeschlossen wird; man sagt dann, der feste Körper schwimme auf der Flüssigkeit.

In unserer bisherigen Darstellungsweise des Verhaltens fester Körper in flüssigen haben wir absichtlich einen Umstand außer Acht gelassen, durch welchen die Erscheinungen ein etwas verschiedenes Aussehen annehmen können.

Es hat nämlich die aus dem Gewichte des festen Körpers hervorgehende Mittelkraft zwar stets die gerade entgegengesetzte Richtung von der, die in Folge des Drucks der Flüssigkeit ihn in die Höhe treibt, und diese beiden Richtungen werden in einer und derselben Geraden liegen, wenn der feste Körper sowie die Flüssigkeit homogen sind. Dann wird der feste Körper während seines Untersinkens oder Aufsteigens in der Flüssigkeit eine rein fortschreitende Bewegung annehmen müssen, wie aus dem, was in §. 20. gesagt worden ist, unmittelbar hervorgeht. Wenn aber der feste Körper heterogen ist, so können die genannten zwei, einander gerade entgegengesetzten Richtungen auch nicht in einer und derselben Geraden liegen, und dann kann der aufsteigende oder untersinkende feste Körper neben seiner rein fortschreitenden Bewegung auch noch eine drehende annehmen, in Folge der er pendelartig schwingend aufsteigt oder untersinkt.

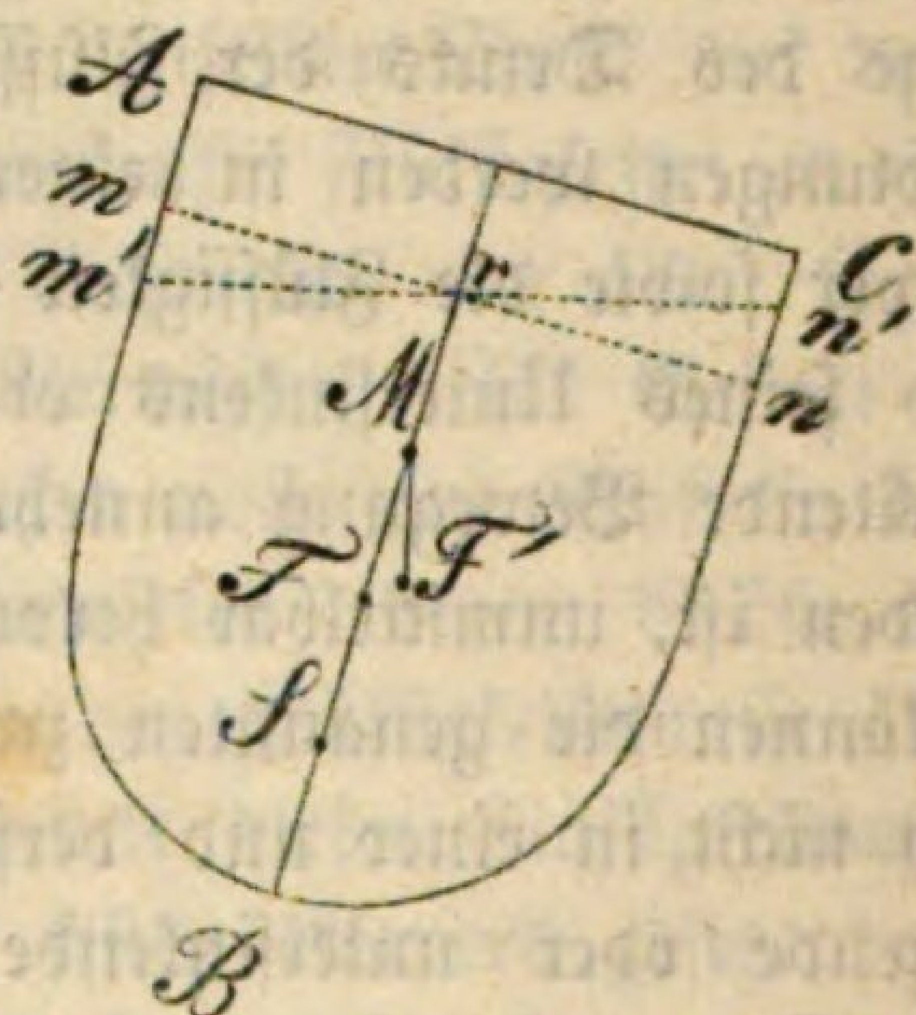
Wenn ein auf einer Flüssigkeit schwimmender Körper zur Ruhe gekommen ist, so müssen nothwendig die Richtungen jener beiden Kräfte, von welchen die eine das Gewicht des schwimmenden Körpers, die andere das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse ist, in einer und derselben Geraden liegen, weil nur unter dieser Voraussetzung der schwimmende Körper sich im Gleichgewichte erhalten kann. Dieses Gleichgewicht jedoch kann kraft der in §. 28. niedergelegten Erörterungen ein haltbares oder unhaltbares sein, und schon die dortigen Betrachtungen zeigen, daß im Allgemeinen der schwimmende Körper sich in einem haltbaren oder unhaltbaren Gleichgewichte befinden werde, je nachdem sein Schwerpunkt unter oder ober dem Schwerpunkt der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse liegt, wiewohl sich dabei wegen der Veränderlichkeit dieses letztern Schwerpunktes Ausnahmen in gewisser Weite voraussehen lassen. Die gelehrten Untersuchungen früherer Mathematiker machten das haltbare oder unhaltbare Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers von der Lage eines gewissen, durch sie bestimmten Punktes abhängig, den sie das Metacentrum nannten. Sie wurden auf diesen Punkt durch folgende Betrachtungen hingeführt. Ist ABCA (Fig. 60. a.) ein Durchschnitt des schwimmenden Körpers, welcher durch eine lothrechte Ebene entstanden ist, und in dem der Schwerpunkt S dieses Körpers liegt, so wird im Stande seines Gleichgewichtes der Schwerpunkt F der vom schwimmenden Körper verdrängten Wassermasse in der durch S gezogenen lothrechten Geraden liegen, die senkrecht auf der Geraden mn steht, in welcher dieser Durchschnitt von der Oberfläche der Flüssigkeit geschnitten wird. Wird nun der schwimmende Körper um eine auf dem Durchschnitt ABCA senkrechte Gerade gedreht, wie in Fig. 60. b.

Fig. 60. a.



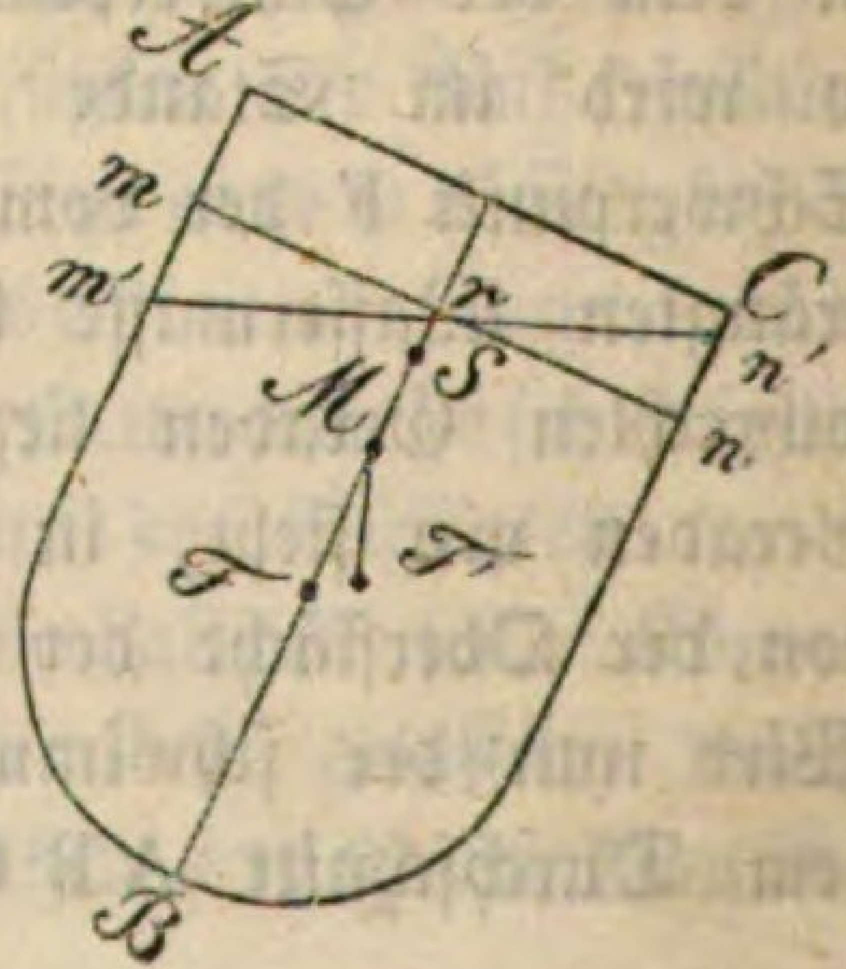
versinnlicht ist, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit gegen ihn eine andere Stellung m′n′ annehmen, als zuvor die mn war, und zwar wird auf seiner einen Seite sich eben so viel von der Flüssigkeit, nämlich n′rn, ansetzen, als auf dessen andere Seite, nämlich mrm′ weggegangen ist, wenn dem schwimmenden Körper gar kein Bestreben zu sinken oder zu steigen während dessen Drehung mitgetheilt worden ist. Nehmen wir nun noch zur Vereinfachung der Betrachtungen an, daß der schwimmende Körper zu beiden Seiten des Durchschnitts ABCA seiner Form und Masse nach völlig symmetrisch gebaut sei, so wird der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse auch in seiner jetzigen neuen Lage noch in dem auch nach der Drehung lothrechten Durchschnitt ABCA liegen bleiben müssen, etwas rechts von der Geraden SF und gegen mn hin; es stelle F′ diese neue Lage des Punktes F vor. Zieht man durch diese neue Stelle F′ eine lothrechte Gerade, so durchschneidet diese die verlängerte Gerade SF in einem Punkte M, der eben das Metacentrum ist unter der Bedingung einer nur unendlich kleinen Drehung, und durch seine Lage zu erkennen giebt, ob das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers ein haltbares oder unhaltbares war. Liegt nämlich der Schwerpunkt S des schwimmenden Körpers wie in Fig. 60. a. unterhalb des Schwerpunkts F der in seinem Ruhestande verdrängten Flüssigkeitsmasse, so liegt nach dem eben Gesagten der Punkt F′ in der Fig. 60. b. nothwendig rechts von S und die beiden gleichen in S und F′ wirkenden Kräfte, von denen erstere lothrecht abwärts, letztere lothrecht aufwärts treibt, bilden einen Drehzwilling, durch welchen der schwimmende Körper nach seiner frühern Lage (Fig. 60. a.) zurückgeführt wird; er befand sich also hier in einem haltbaren Gleichgewichte. Lag aber der Schwerpunkt S des in Ruhe sich befindenden schwimmenden Körpers lothrecht ober dem Punkte F, so wird die Fig. 60. b. eine von den nachstehenden Fig. 60. c. oder Fig. 60. d. werden müssen.

Fig. 60. b.



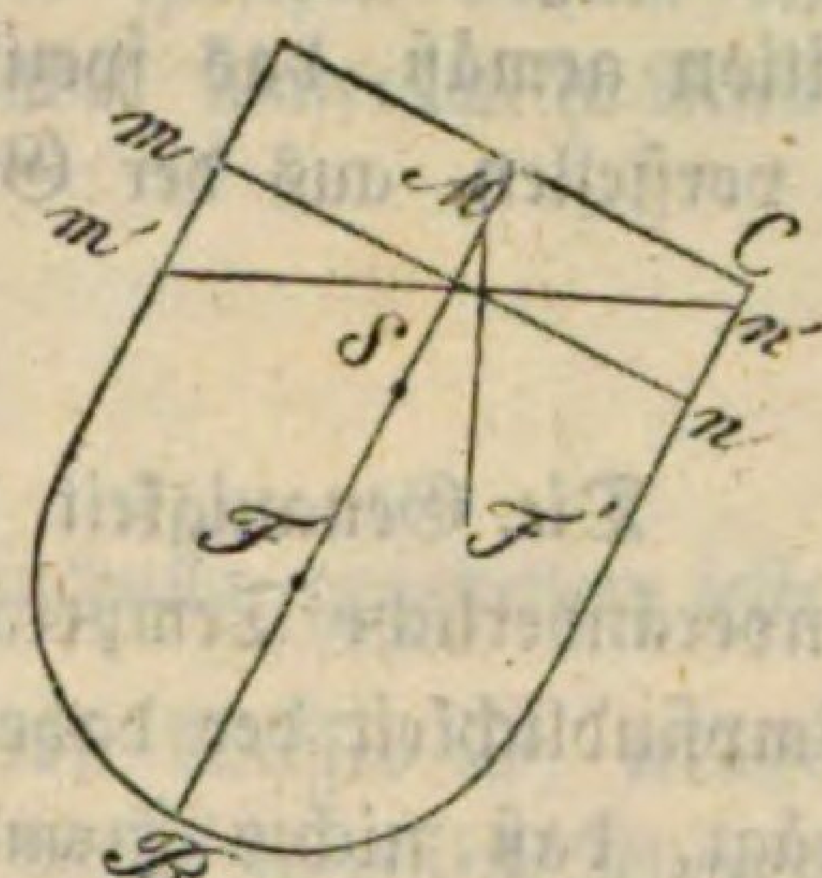
Im Falle der Fig. 60. c., wo der Schwerpunkt des Körpers S oberhalb dem Metacentrum M liegt, bilden die zwei gleichen in S und F′ wirkenden Kräfte, von denen erstere lothrecht abwärts, letztere lothrecht aufwärts treibt, einen Drehzwilling, durch welchen der schwimmende Körper von seiner früheren Gleichgewichtslage weiter abgeführt wird, er befand sich also vor der Drehung in einem unhaltbaren Gleichgewichte. So weit ist alles gerade so, als ob der Schwerpunkt F der verdrängten Flüssigkeitsmasse

Fig. 60. c.



unveränderlich wäre, d. h. als ob F′ stets in F liegen bliebe; die Fig. 60. d. aber enthält die aus der Beweglichkeit des Punktes F′ entspringenden Ausnahmen. In diesem Falle nämlich bilden die zwei in S und F′ wirkenden gleichen Kräfte einen Drehzwilling, durch welchen der schwimmende Körper wieder nach seiner früheren Gleichgewichtslage hin zurückgedreht wird; er befand sich folglich in einem stabilen Gleichgewichte. Es läßt sich aus den vorstehenden Betrachtungen leicht die allgemeine Regel entnehmen, daß ein **schwimmender Körper in einem haltbaren oder unhaltbaren Gleichgewichte sich befindet, je nachdem das Metacentrum höher oder tiefer als sein Schwerpunkt liegt.**

Fig. 60. d.



§. 41. Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper.

Das Verhalten der festen Körper innerhalb flüssiger, wie es in dem vorigen Paragraph dargestellt worden ist, hat eine für die Wissenschaft und Technik gleich wichtige Anwendung gefunden, nämlich die zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper. Man versteht unter **specifischem** Gewichte die Verhältnißzahl zwischen den Gewichten zweier verschiedener Körper unter der Bedingung, daß diese Körper einen und denselben Raum einnehmen. Hierbei ist man, um Verwirrung zu vermeiden, übereingekommen, daß unter die zwei mit einander zu vergleichenden Körper stets ein und derselbe aufgenommen wird, wozu man das überall vorhandene und durch Destillation stets in voller Reinheit zu erhaltende Wasser erwählte, so daß man unter dem specifischen Gewichte eines Körpers die Zahl versteht, womit man das Gewicht von einem Raume Wassers multipliciren muß, um das Gewicht von einem gleichen Raume dieses Körpers zu erhalten. Um im Gegensatze zu diesem specifischen Gewichte das besser hervorheben zu können, was bisher von uns schlechtweg Gewicht genannt worden ist, werden wir letzteres das **absolute** Gewicht eines Körpers nennen.

Da die Herstellung völlig gleicher Räume an zwei Körpern großen Schwierigkeiten unterliegt, so würde die Bestimmung des specifischen Gewichts eines Körpers neben einer außergewöhnlichen Mühe doch nur eine geringe Genauigkeit geben, wenn nicht das Verhalten der festen Körper in flüssigen die Forderung der gleichen Räume fast ganz von selbst erfüllte. Da nämlich ein unter eine Flüssigkeit getauchter fester Körper von seinem Gewichte genau so viel verliert als das Gewicht von der mit ihm völlig einerlei Raum einnehmenden Flüssigkeit beträgt, so wird, wenn man zur Flüssigkeit reines Wasser nimmt, zuvor das Gewicht G des Körpers außer dem Wasser und hierauf den Verlust g dieses Gewichts, wenn er im reinen Wasser untertaucht, genau be-

stimmt, dieser Verlust das Gewicht von Wasser, welches mit dem festen Körper völlig einerlei Raum einnimmt, anzeigen, und nun ergiebt sich, der Definition gemäß, das spezifische Gewicht des festen Körpers, wenn wir es durch S vorstellen, aus der Gleichung:

$$S = \frac{G}{g} \,. \qquad (1.)$$

Die Genauigkeit dieser Bestimmung setzt ganz reines Wasser und eine unveränderliche Temperatur *) voraus, und wird um so größer, je größer die Empfindlichkeit der dabei gebrauchten Wage ist, und je mehr man dafür Sorge trägt, daß nichts Fremdes an dem festen Körper hängen bleibt, während er unter dem Wasser sich befindet, wobei insbesondere die hier sich leicht anhängenden Luftbläschen zu berücksichtigen sind. Die Sicherheit einer solchen Bestimmung verlangt, daß der feste Körper sich im Wasser nicht verändere.

Das bisherige Verfahren zur Auffindung des specifischen Gewichtes eines Körpers setzt voraus, daß dieser Körper ein fester und im Wasser unveränderlicher sei; jedoch läßt es sich leicht auf Körper aller Art ausdehnen. Hat man das specifische Gewicht einer von Wasser verschiedenen Flüssigkeit zu bestimmen, so wähle man einen festen Körper aus, welcher weder im Wasser noch in dieser Flüssigkeit angegriffen wird, und bestimme wie vorher den Verlust g, welchen das Gewicht dieses Körpers im Wasser erleidet, sowie den g′, welchen es unter der zu untersuchenden Flüssigkeit erfährt, so sind g und g′ die Gewichte von mit dem des festen Körpers völlig gleichen Räumen Wassers und der Flüssigkeit; sonach sind g und g′ die Gewichte von Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit, welche bei beiden völlig einerlei Räumen entsprechen, und man hat, wenn s′ das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit bezeichnet, wieder der Definition gemäß:

$$s' = \frac{g'}{g} \,. \qquad (2.)$$

Hat man das specifische Gewicht eines festen Körpers zu bestimmen, der im Wasser veränderlich ist, so wähle man irgend eine Flüssigkeit aus, in der er sich nicht ändert, suche außer seinem Gewichte G den Verlust g′ auf, welchen es in dieser Flüssigkeit erleidet, und setze

$$S' = \frac{G}{g'} \,;$$

hierauf suche man das specifische Gewicht s′ dieser Flüssigkeit selber auf, wobei

$$s' = \frac{g'}{g}$$

*) Diese unveränderliche Temperatur kann jede sein, daher genügt es schon, wenn bei einer Bestimmung des specifischen Gewichts immer auch zugleich die Temperatur angegeben wird, bei welcher sie geschehen ist.

ist, der Gleichung (2.) gemäß, wenn g das Gewicht von Wasser bedeutet, welches einen mit dem zu untersuchenden festen Körper gleichen Raum einnimmt. Aus den beiden letzten Gleichungen aber findet man durch Multiplication

$$S' \,.\, s' = \frac{G}{g} \,;$$

es ist aber $\frac{G}{g}$ das specifische Gewicht des zur Untersuchung gegebenen festen Körpers, weil G sein Gewicht, und g das Gewicht von Wasser ist, welches denselben Raum wie er einnimmt; bezeichnet man also dieses specifische Gewicht durch S, so wird dasselbe durch die folgende Gleichung gegeben:

$$S = S' \,.\, s' \,. \qquad (3.)$$

Man hätte das specifische Gewicht in diesem letztern Falle auch dadurch erhalten können, daß man den im Wasser veränderlichen Körper, nachdem sein Gewicht G bestimmt worden ist, mit einem im Wasser unveränderlichen Körper, z. B. einem Harze oder Wachs überzogen und zuletzt den Verlust v an Gewicht mittelst der Wage erforscht hätte, den der überzogene Körper unter Wasser erleidet. Aus den so erhaltenen Größen G und v läßt sich nun ohne große Mühe das gesuchte specifische Gewicht auf die nachstehende Weise berechnen.

Man sucht vor Allem das Gewicht G′ des überzogenen Körpers sowie den Gewichtsverlust 𝔳 auf, welchen ein Stück von dem Gewichte 𝔊 des zum Ueberzuge benützten Körpers unter Wasser erleidet, und leitet, weil G′ — G das Gewicht des auf dem zu untersuchenden Körper befindlichen Ueberzuges ist, mit Hilfe der Proportion

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{v} = G' - G : x$$

den Verlust an Gewicht $\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{G}}\,(G' - G)$ ab, den dieser Ueberzug im Wasser erleidet. Da nun v der Gewichtsverlust des überzogenen Körpers in Wasser war, so ist

$$v - \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{G}}\,(G' - G)$$

der Gewichtsverlust des Körpers ohne Ueberzug unter Wasser, dessen Gewicht G war. Folglich erhält man der Gleichung (1.) gemäß das verlangte specifische Gewicht des im Wasser veränderlichen Körpers dadurch, daß man sein Gewicht G durch die Größe $v - \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{G}}\,(G' - G)$, welche seinen Gewichtsverlust unter Wasser hergiebt, dividirt.

Ich habe nun nur noch einen besondern Fall zu berühren, der den, der auf ihn das erste Mal stößt, in einige Verlegenheit bringen könnte; es ist dieß der, wo das specifische Gewicht von einem Körper aufgesucht werden soll, der

auf dem Wasser schwimmt. Man sieht indessen bald ein, daß man in einem solchen Falle den auf dem Wasser schwimmenden Körper blos in Verbindung mit einem viel dichteren Körper, dessen Gewichtsverlust im Wasser man zuvor aufgesucht hat, zu bringen braucht, um zum Zwecke zu gelangen. Sucht man nämlich den Gewichtsverlust der mit einander verbundenen beiden Körper im Wasser auf, und zieht man den zuvor bestimmten Gewichtsverlust des dichten Körpers allein davon ab, so erhält man den Gewichtsverlust des auf dem Wasser schwimmenden Körpers für sich, welcher indessen mehr betragen wird, als das Gewicht dieses Körpers selber, und aus diesen beiden Größen ergiebt sich sodann mittelst der Gleichung (1) das gesuchte specifische Gewicht als ein ächter Bruch. Pulverförmige und überhaupt solche Körper, welche der Flüssigkeit einen Zugang in ihre Zwischenräume gestatten, lassen eine genaue Bestimmung ihres specifischen Gewichtes kaum mehr zu. In solchen Fällen thut Kopps Volumenometer noch die besten Dienste.

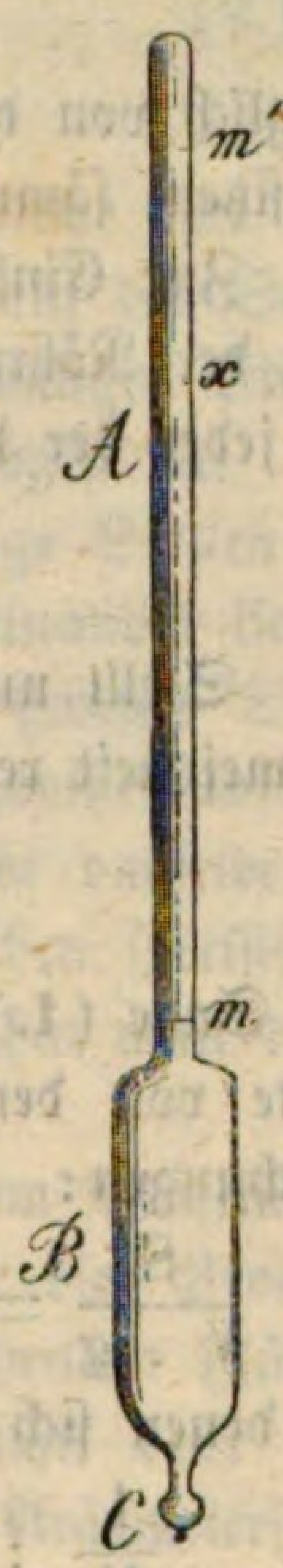
Zum Aufhängen und Verbinden der unter einer Flüssigkeit abzuwägenden Körper bedient man sich in der Regel solcher Körper, deren Gewicht man vernachlässigen darf, wie z. B. eines Coconfadens, eines Menschen- oder Pferdehaares und dgl.; ist man aber gezwungen, dazu Fäden von größerem Gewichte zu gebrauchen, wie z. B. dünne Drähte von Platin, so wird es nöthig, deren Gewicht und Gewichtsverlust im Wasser in Rechnung zu bringen.

§. 42. Fortsetzung. Aräometer mit Scala.

Mit den bisherigen Mitteln, das specifische Gewicht der Körper zu bestimmen, hätte sich die Physik als Wissenschaft begnügen können; allein das bürgerliche Leben macht zur Erreichung verwandter Zwecke vor Allem Ansprüche auf möglichste Einfachheit und Bequemlichkeit der Behandlung und selbst der Gelehrte zieht, wo es keinen Nachtheil bringt, die Schnelligkeit, womit Resultate erhalten werden, ihrer größern Schärfe vor. Aus derlei Bedürfnissen sind die sogenannten Flüssigkeitswagen oder Aräometer hervorgegangen. Fast immer, wenn eine Flüssigkeit einen andern Körper in sich aufnimmt, ändert sich deren specifisches Gewicht in dem Maaße mehr, als sie mehr von diesem andern Körper in sich aufgenommen hat, und dann läßt sich der Gehalt einer solchen Flüssigkeit aus deren specifischem Gewichte entnehmen, was zu wissen, sowohl für den Handel mit dergleichen Flüssigkeiten als für deren Verwendung von großem Interesse ist, wie z. B. bei Branntweinen, Weinen, Bieren, Säuren, Salzauflösungen. Die dazu am öftesten gebrauchten Aräometer, welche wohl auch je nach der besondern Flüssigkeit, zu der sie verwendet werden, die verschiedenen Benennungen: Branntweinwage, Weinwage, Bierwage, Säurewage, Salzwage erhalten, haben eine der neben (Fig. 61.) verzeichneten ähnliche Gestalt und bestehen der Hauptsache nach aus einer cylindrischen, oder doch von außen wohl calibrirten

Röhre A und einem weiteren cylinder-kugel- oder kegelförmigen Körper B, der sich in einen kleineren zur Beschwerung des Ganzen dienenden Ansatz C endigt, von Glas oder von Metall in solchen Verhältnissen miteinander verbunden, daß das aus den genannten Theilen zusammengesetzte Instrument auf allen den Flüssigkeiten, wozu es benützt werden soll, schwimmt, in der dichtesten noch bis zur Röhre A wenig oberhalb des Körpers B, in der dünnsten bis nahe an das obere Ende der Röhre A einsinkend und dabei stets eine möglichst lothrechte Stellung bewahrend. Man merkt diese zwei Stellen, bis zu welchen das Aräometer in den beiden Flüssigkeiten einsinkt, auf seinem Halse A genau an; sie seien m und m'. Gewöhnlich kennt man schon vorweg die specifischen Gewichte der beiden Grenzflüssigkeiten, welche zu den Stellen m und m' hinführen, widrigenfalls man sie auf den im vorigen Paragraph angezeigten Wegen aufsuchen kann; sie seien s und s'. In früheren Zeiten pflegte man den Abstand mm' in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, welche Theilung man die Scala des Aräometers, und daher dieses selbst Scalenaräometer nannte, wobei fast jeder Verfertiger von solchen Instrumenten nach seinem eigenen Gutdünken verfuhr, das sich theilweise auch auf die Bestimmung der festen Stellen m und m' erstreckte. Hieraus entsprang ein Wust von verschiedenen Benennungen und willkührlichen Bestimmungen, an dessen Ausmerzung glücklicherweise die Gegenwart zu gehen scheint; daher werde ich alle jene Ueberbleibsel aus früherer Zeit mit Stillschweigen übergehen und blos die neueren Apparate dieser Art weiter besprechen.

Fig. 61.



Die natürlichste Einrichtung einer solchen Scala ist ohne Zweifel die, wobei das Aräometer unmittelbar das specifische Gewicht der Flüssigkeit anzeigt, in der es steht; aber die Anfertigung einer solchen Scala ist mit einiger Mühe verbunden. Man kann dabei auf nachstehende Weise verfahren, die sich auf den in §. 40. mitgetheilten Satz gründet, daß das Gewicht eines schwimmenden Körpers immer dem Gewichte der Flüssigkeit, worauf er schwimmt, von solchem Rauminhalte völlig gleich ist, wie er durch den schwimmenden Körper aus der Flüssigkeit ausgeschnitten wird. Mit Hilfe dieses Satzes nämlich kann man die Stelle x der Scala auffinden, bis zu welcher das Aräometer in einer Flüssigkeit von dem gegebenen specifischen Gewichte σ einsinken muß. Bezeichnet zu diesem Ende S das Gewicht des Aräometers in trockenem und reinem Zustande, V den Raum des untern Theils des Aräometers bis zur Stelle m hin, v den des Aräometerhalses zwischen den beiden Stellen m und m', endlich $\mathfrak{v}$ den Raum des Aräometerhalses zwischen der

Stelle m und der zu suchenden x, so haben kraft des angeführten Satzes die Räume

$$V \quad , \quad V + v \quad \text{und} \quad V + \mathfrak{v}$$

bezüglich von den drei Flüssigkeiten, welche die specifischen Gewichte s, s′ und σ besitzen, sämmtlich ein und dasselbe absolute Gewicht S.

Zur Einheit dieser Räume kann man den nehmen, welcher zur Calibrirung der Röhre gedient hat; dann beträgt das Gewicht dieser Raumeinheit von jeder der drei Flüssigkeiten bezüglich:

$$\frac{S}{V} \quad , \quad \frac{S}{V+v} \quad \text{und} \quad \frac{S}{V+\mathfrak{v}} \; .$$

Stellt nun g auf einen Augenblick das absolute Gewicht von derselben Raumeinheit reinen Wassers vor, so sind

$$\frac{S}{V \, . \, g} \; , \; \frac{S}{(V + v)\, g} \quad \text{und} \quad \frac{S}{(V + \mathfrak{v})\, g} \; ,$$

dem Satze (1.) des vorigen Paragraph gemäß, bezüglich die specifischen Gewichte von den drei Flüssigkeiten; man hat folglich die nachstehenden drei Gleichungen:

$$\frac{S}{V \, . \, g} = s \; , \; \frac{S}{(V + v)\, g} = s' \quad \text{und} \quad \frac{S}{(V + \mathfrak{v})\, g} = \sigma \; ,$$

aus denen sich sogleich die folgenden Verhältnißgleichungen ergeben:

$$\frac{1}{V} : \frac{1}{V+v} = s : s' \quad \text{und} \quad \frac{1}{V} : \frac{1}{V+\mathfrak{v}} = s : \sigma \, . \qquad (1.)$$

Meistens bezieht sich eine von den beiden Größen s und s′ auf reines Wasser und ist dann 1, wodurch die Gleichungen (1.) noch einfacher werden; wir werden jedoch die Rechnung an dem allgemeineren Fall fortführen, weil dieser kaum mehr Mühe macht.

Der Raum v des Halses zwischen den Stellen m und m′ kann, wenn er cylindrisch ist, durch den Abstand dieser beiden Stellen von einander ersetzt werden, wodurch weiter nichts geschieht, als daß ein Cylinder, dessen Grundfläche der Querschnitt jenes Halses ist und der zur Höhe die Einheit des Maaßstabes hat, womit der Abstand zwischen m und m′ gemessen worden ist, zu der bisher noch unbestimmt gelassenen Raumeinheit genommen wird, oder man kann den Raum v des Halses, wenn er aus einer nicht genau cylindrischen Glasröhre besteht, durch die Zahl der gleichen Raumtheile ersetzen, welche beim Calibriren dieser Röhre sich zwischen den Stellen m und m′ gezeigt haben, wo dann dieser Raumtheil selber zur Raumeinheit gestempelt wird. In jedem dieser beiden Fälle enthalten die beiden Gleichungen (1.) blos die zwei unbekannten Größen V und $\mathfrak{v}$, welche sich aus ihnen finden lassen und denen die gewählte Raumeinheit zu Grunde liegt. Eliminirt man aus den Gleichungen (1.) die Unbekannte V, so erhält man die andere Unbekannte $\mathfrak{v}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \frac{s - \sigma}{s - s'} \cdot \frac{s'}{\sigma} \cdot v = \frac{\frac{s}{\sigma} - 1}{\frac{s}{s'} - 1} \cdot v \;, \qquad (2.)$$

welche Unbekannte die einzige zur Bildung der Scala erforderliche ist. Hat man so die Größe $\mathfrak{v}$ gefunden, so hat man auch die Stelle x auf der Scala, indem man blos die gefundene Zahl $\mathfrak{v}$ im Sinne ihrer jedesmaligen Einheit als Länge von m aus bis zur gesuchten Stelle x hin aufzutragen hat. So kann man so viele zu gegebenen specifischen Gewichten gehörige Stellen der Scala aufsuchen, als man will, die, wenn sie nahe genug bei einander liegen, in der Regel durch weitere Abtheilung in gleiche Theile zur ganzen Scala führen. Am besten ist es, wenn man sich hierzu einer Längentheilmaschine bedienen kann. Das Verfahren, die Scala aufzufinden, bleibt dasselbe bei Flüssigkeiten aller Art, nur sind für solche, die von sehr ungleichen specifischen Gewichten sind, verschiedene Aräometer erforderlich, gewöhnlich hat man deren dreierlei.

Heut zu Tag hält man es für Handel und Wandel am bequemsten, die Aräometerscala so einzurichten, daß sie sogleich anzeigt, wie viel Procente des eigentlich Werth habenden Bestandtheils in der zu untersuchenden Flüssigkeit vorhanden sind, wobei diese Procente entweder dem Gewichte oder dem Raume nach verlangt werden können. — Will man sich eine Aräometerscala für Gewichtsprocente des der Flüssigkeit Werth gebenden Bestandtheils verfertigen, so bereitet man sich z. B. eine Flüssigkeit aus 5 Gewichtstheilen des werthgebenden und 95 Gewichtstheilen des werthlosen Bestandtheiles, welche Flüssigkeit also in 100 Gewichtstheilen 5 Gewichtstheile oder 5 Procent vom werthgebenden Bestandtheile in sich enthält, und bestimmt deren specifisches Gewicht möglichst genau. Macht man nun an der Stelle der vorigen Scala, welche das gefundene specifische Gewicht anzeigt, einen Theilstrich und schreibt neben ihm die Zahl 5 an, so giebt dieser dem Gewichte nach 5 Procent des werthgebenden Bestandtheils in der, diesen Theilstrich erreichenden Flüssigkeit zu erkennen. Aehnlich kann man den zu jeder Procentzahl gehörigen Theilstrich auf der Scala finden, sonach die ganze Scala erhalten, wobei erwähnt zu werden verdient, daß die einmal für jene Mischungen aufgefundenen specifischen Gewichte für alle Zeiten zu gleichem Zwecke benützt werden können, weßhalb eine Tabelle dieser Bestimmungen an sich schon in allen Fällen hinreichend ist.

Will man sich hingegen eine Procentenscala dem Raume nach verschaffen, so verfährt man ganz eben so, nur daß man die Mischungen nicht nach Gewichtstheilen, sondern nach Raumtheilen zusammensetzt, und deren specifische Gewichte aufsucht. Bei solchen Scalen ist jedoch auf die Contraction Rücksicht zu nehmen, welcher der Raum eines Gemisches der zwei verschiedenartigen

Bestandtheile nach der Mischung unterworfen ist; sie muß bei der Ausführung der Scala noch besonders in Anschlag gebracht werden.

Welchen besondern Zweck solche Aräometer auch immer erreichen sollen, so ist es doch gut, wenn man ihnen neben ihrer eigenthümlichen Scala noch die der specifischen Gewichte beigiebt, weil sie dadurch eines allgemeineren Gebrauches fähig werden, und unter Beiziehung der erwähnten Tabelle alle Fragen bezüglich einer jeden Flüssigkeit zu beantworten vermögen.

Weil zur Scala der specifischen Gewichte die Berechnung von v nach der Gleichung (2.) gefordert wird, so dürfte die allgemeinere Anwendung dieser Gleichung bis dahin unterbleiben, wo die Gesammtheit unserer Künstler eingesehen haben wird, daß sie ohne etwas Rechnen nicht mehr bestehen können. Wahrscheinlich ist es auch der angeregte Umstand und die daraus entspringende Schwierigkeit, richtige Scalen der specifischen Gewichte zu erhalten, wodurch Gay Lussac zum Baue von noch einem neuen besondern Aräometer getrieben worden ist, der von seinem Erfinder den Namen Volumeter erhalten hat. Die Scala des Volumeters enthält Theilstriche, welche gleiche Räume vom Halse des Aräometers abschneiden und zwar solche, die ein bekannter aliquoter Theil von dem Raume sind, bis zu welchem das Aräometer in reinem Wasser einsinkt. Da sich nun den Gleichungen (1.) zur Folge die specifischen Gewichte zweier Flüssigkeiten umgekehrt zu einander verhalten wie die Räume, bis zu welchen ein und dasselbe Aräometer in ihnen einsinkt, so sind die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten leicht aus den Angaben des Volumeters abzuleiten.

Sind die Aräometer aus Metall gemacht, so gräbt man die Scalen unmittelbar auf deren Hals ein; sind sie aber aus Glas gefertigt, so zeichnet man die Scalen auf einen Papierstreifen, den man gerollt in die oben noch nicht zugeschmolzene Glasröhre schiebt, und hier in seiner richtigen Stellung durch irgend Mittel befestigt, und dann erst wird der größern Sicherheit wegen die Glasröhre zugeschmolzen.

§. 43. Fortsetzung. Gewichts-Aräometer.

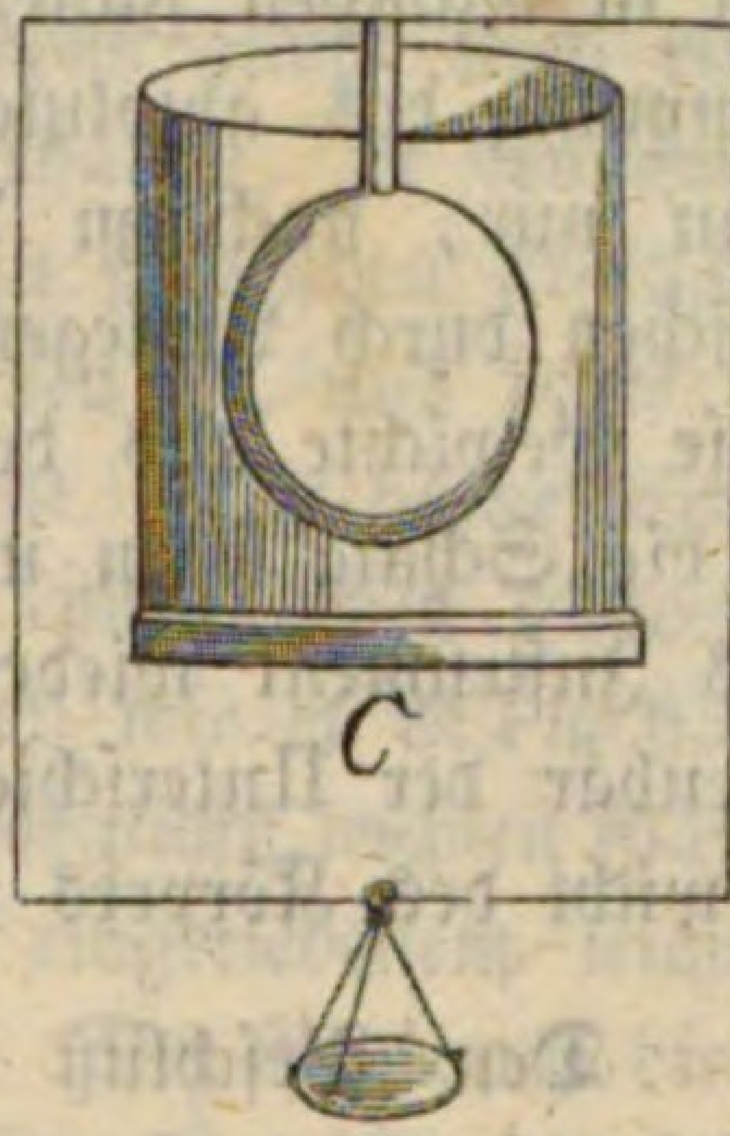
Neben den soeben beschriebenen Scalenaräometern giebt es noch eine andere Art von Aräometern, die man zum Unterschied von jenen Gewichts-Aräometer genannt hat. Diese bestehen wie jene Fig. 61. aus einem Körper B, haben aber nur einen kurzen Hals A, mit einem daran angebrachten Zeichen, bis zu welchem sie in jede zu untersuchende Flüssigkeit mittelst Gewichten, von welchen sie ihren Namen haben, eingesenkt werden. Um diese Gewichte bequem auflegen zu können, befestigt man an ihren Hals eine leichte Schale, wie in Fig. 62., oder einen leichten Rahmen, wie in Fig. 63., an dessen unterm Theil

Fig. 62.



eine kleine Wagschale für die aufzunehmenden Gewichte aufgehängt wird. Diese letztere Einrichtung ist unstreitig die zweckmäßigere, weil bei ihr der Schwerpunkt des ganzen Instruments stets unter dem der von ihm verdrängten Flüssigkeits-Masse zu liegen kommt, und es dadurch vor einem Umschlagen völlig gesichert ist; es fordert aber an einem Tische, oder sonst wo, einen festen schmalen Vorsprung C, auf den das Glas mit der Flüssigkeit gestellt wird, und der dem Rahmen eine hinreichend freie Beweglichkeit gestattet.

Fig. 63.



Die Art, wie man mit diesen Gewichtsaräometern zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von einer Flüssigkeit gelangt, ist eine sehr einfache. Da nämlich hier das Aräometer in jede Flüssigkeit mittelst Auflegung von Gewichten bis an dieselbe Stelle eingesenkt wird, so verdrängt es von jeder immer einen und denselben Raum, dessen Gewicht das des ganzen Aräometerkörpers sammt den aufgelegten Gewichten ist; bezeichnet daher G das Gewicht des Aräometerkörpers, g das Gewicht, welches noch aufgelegt werden muß, um dessen Einsinken bis zum Zeichen in Wasser zu bewirken, g′ hingegen das Gewicht, welches auf den Aräometer aufgelegt werden muß, um ihn bis zum Einsinken an das Zeichen in einer andern Flüssigkeit zu bringen, so sind

$$G + g \quad \text{und} \quad G + g'$$

die Gewichte von gleichen Räumen des Wassers und der Flüssigkeit, mithin ist der Gleichung (1.) in §. 41. gemäß, wenn s′ das specifische Gewicht von dieser Flüssigkeit vorstellt,

$$s' = \frac{G + g'}{G + g} .$$

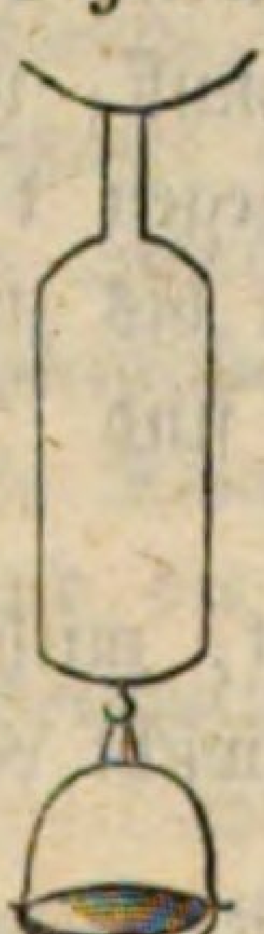
Man hat es bei der Anfertigung dieser Aräometer in seiner Gewalt, das Gewicht G ihres Körpers ziemlich nach Belieben abzuändern; richtet man es daher so ein, daß G + g eine Decimalzahl wie 1000 oder 10,000 wird und merkt man sich ein für allemal, etwa auf der Schale, worauf die Gewichte gelegt werden, das Gewicht G des Aräometers an, so findet sich das specifische Gewicht der untersuchten Flüssigkeit durch eine blose Addition fast ohne alle Rechnung.

Da der Hals bei den Gewichtsaräometern sehr kurz ist, und daher ohne die Zerbrechlichkeit des Instruments zu vermehren, verhältnißmäßig dünner als bei den Scalenaräometern gemacht werden kann, von der Dünne des Halses aber die Empfindlichkeit eines Aräometers abhängt, so sieht man ein, daß die Empfindlichkeit des Gewichtsaräometers viel größer als die des Scalenaräometers gemacht werden kann. Die Genauigkeit der mit einem Gewichtsaräometer gewonnenen Resultate kann so groß werden, daß sich dieselbe mit jener

messen kann, welche durch die in §. 41. angezeigten Mittel erhalten wird. In Folge dieser großen Empfindlichkeit der Gewichtsaräometer können dieselben in manchen Fällen mit Vortheil auch als gewöhnliche Wagen zur Bestimmung des absoluten Gewichts der Körper dienen. Zu diesem Ende darf man nur, nachdem das Aräometer im Wasser zum Einsinken bis an sein Zeichen durch Auflegen von Gewichten in dessen Schale gebracht worden ist, diese Gewichte aus der Schale herausnehmen und den zu wägenden Körper in die Schale legen und dazu noch so viele von den Gewichten bringen, daß das Instrument wieder in Wasser bis an sein Zeichen einsinkt; dann giebt offenbar der Unterschied zwischen diesen beiden Gewichtssummen das absolute Gewicht des Körpers zu erkennen.

Den Beschluß der Aräometer macht in würdiger Weise das von Nicholson erdachte und nach ihm genannte, welches namentlich den Mineralogen so gute Dienste leistet. Es ist dieses ein Gewichtsaräometer von der in Fig. 62. angezeigten Form, an dessen unterm Theil aber noch eine zweite durchlöcherte Schale angehängt wird, wodurch es die nebenverzeichnete Form (Fig. 64.) erhält. Dieses nicholson'sche Aräometer hat das Eigenthümliche, daß man mit ihm ohne Wage das specifische Gewicht von nicht zu großen festen Körpern auffinden kann, wozu bisher kein Aräometer seine Dienste anbot. Mit demselben sucht man zuerst das absolute Gewicht des Körpers, dessen specifisches Gewicht man finden will, auf die soeben angezeigte Weise auf, wobei zuletzt der Körper sammt den Gewichten, wodurch das Instrument zum Einsinken bis an sein Zeichen getrieben wird, auf der obern Schale liegt. Aus dieser nimmt man ihn jetzt heraus und legt ihn in die untere Schale, wo dann das Instrument in Wasser nicht mehr bis an sein Zeichen einsinken wird, weil der Körper jetzt unter Wasser liegt, und daher von seinem Gewichte so viel verliert, als das Gewicht einer mit ihm gleich großen Wassermasse beträgt. Es wird aber dieses letztere Gewicht offenbar durch die Gewichte angezeigt, welche man noch auf die obere Schale zu den darin schon vorhandenen legen muß, um das Instrument bis zum Einsinken an sein Zeichen zurückzubringen, und durch Division desselben in das absolute Gewicht des Körpers erhält man dann dessen specifisches Gewicht, der Gleichung (1.) in §. 41. gemäß.

Fig. 64.



Auch die Versuche mit Aräometern müssen, wenn sie große Genauigkeit geben sollen, wie die in §. 41. besprochenen Bestimmungen stets in der gleichen Temperatur gemacht werden, oder man muß wenigstens die während der Operation vorhandene Temperatur anzeigen; daher findet man zuweilen zu diesem Zwecke ein kleines Thermometer im Körper des Aräometers eingeschlossen, das in der Regel mit einer solchen Scala versehen ist, wodurch die

wegen der Temperatur zu machenden Correktionen seiner Angaben ganz leicht geschehen können.

Ich darf diesen Gegenstand nicht abschließen, ohne zuvor noch eines Mittels, das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu erhalten, zu erwähnen, das namentlich da, wo man nur über wenig von der zu prüfenden Flüssigkeit zu gebieten hat, kaum durch irgend ein anderes zu ersetzen ist, und schon seiner großen Einfachheit halber gekannt zu werden verdient. Der ganze Apparat besteht aus einem kleinen und leichten cylindrischen Gläschen mit aufgeschliffenem leichten und ebenen Deckel, wie er in Fig. 65. a. abgebildet ist, oder aus einem kleinen und möglichst leichten Fläschchen mit stark conischem Halse und gut eingeriebenem leichten Stöpsel, wie er in Fig. 65. b. abgebildet ist. Der Gebrauch dieses Apparates besteht einfach darin, daß man sein Gewicht, wenn er leer ist, genau aufsucht, ihn dann mit reinem Wasser anfüllt, den Deckel oder Stöpsel aufsetzt in solcher Weise, daß keine Luft in ihm zurückbleibt und, nachdem dessen äußere Wände wohl abgetrocknet worden sind, auf's Neue wägt; die Differenz dieser beiden Gewichte giebt das Gewicht des im Gefäße enthaltenen Wassers an. Verfährt man eben so mit irgend einer andern Flüssigkeit, so findet man das Gewicht von einem gleichen Raume dieser Flüssigkeit und aus beiden deren specifisches Gewicht, der Gleichung (1.) in §. 41. gemäß. Bei dem Apparat von der Form Fig. 65. b. thut man wohl, am Rand des Fläschchens und am Stöpsel ein Zeichen anzubringen und letzteren so einzusetzen, daß die beiden Zeichen bei einander liegen, weil bei einem nicht ganz genauen Einreiben des Stöpsels in das Fläschchen dieser bei verschiedenen Stellungen ungleich tief in das Fläschchen einsinken könnte.

Fig. 65. a.

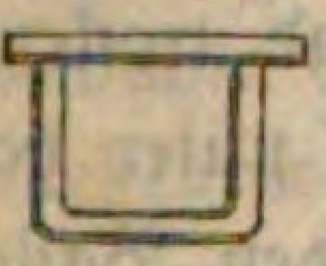


Fig. 65. b.



Es ist noch ein Umstand zu erwähnen, der alle Bestimmungen des specifischen Gewichts gleichmäßig afficirt, nämlich der, daß alle Wägungen der Körper in der, unsere Erde umgebenden atmosphärischen Luft geschehen, wodurch die Gewichte dieser Körper um so viel zu gering ausfallen, als das Gewicht eines mit ihnen gleichen Raums der Luft beträgt.

Dieser Unterschied ist jedoch so gering, daß er in sehr vielen Fällen ganz außer Acht gelassen werden kann, jedenfalls aber läßt sich derselbe völlig beseitigen, wenn man das specifische Gewicht der Luft, welches im nächsten Paragraph angegeben ist, dabei in Rechnung bringt.

§. 44. Fortsetzung. Specifisches Gewicht der Gase.

Bis jetzt haben wir ausschließlich nur von den Mitteln gesprochen, wodurch sich das specifische Gewicht der festen Körper und der wasserförmigen Flüssigkeiten erhalten läßt. Aus Versuchen, wie wir sie in den letzten drei Paragraphen beschrieben haben, sind die Tafeln der specifischen Gewichte für

feste Körper und wasserförmige Flüssigkeiten hervorgegangen, welche man am ausführlichsten in den Wörterbüchern der Physik und Auszüge daraus in den diesem Compendium beigefügten Tabellen findet. Die Bestimmung des specifischen Gewichts von luftförmigen Flüssigkeiten unterliegt ungleich größern Schwierigkeiten, so großen, daß man erst in der neuesten Zeit in Bezug auf manche, wie z. B. für das Wasserstoffgas, gesicherte Resultate hat erhalten können. Man beobachtet hierbei im Allgemeinen das folgende Verfahren. Auf den Hals eines gläsernen Ballons wird eine Fassung luftdicht aufgesetzt, die sich auf die Luftpumpe schrauben und mittelst eines Hahns verschließen läßt. Einmal nun füllt man den Ballon mit möglist reiner und trockener Luft derjenigen Art, die man untersuchen will, wobei der Druck, unter dem sie steht, sowie ihre Temperatur bekannt sein muß, und wägt den Ballon sorgfältig ab; ein andermal schraubt man den Ballon auf die Luftpumpe, setzt die Pumpe, während man den in der Fassung befindlichen Hahn öffnet, in Bewegung, und entleert den Ballon so stark als möglich, wobei man den am Ende noch vorhandenen Druck beobachten und sich anmerken muß, verschließt hierauf den Ballon, schraubt ihn von der Pumpe ab und wägt ihn auf's Neue sorgfältig. Die Differenz dieser beiden Gewichte ist das Gewicht der aus dem Ballon während des Auspumpens entwichenen Luft, und daraus läßt sich mit Berücksichtigung des am Ende des Auspumpens noch übrig gebliebenen Druckes das Gewicht von aller im Ballon gewesenen Luft berechnen, welches Resultat man auf einen Normaldruck und auf eine Normaltemperatur zurückzuführen pflegt. Auf diese Weise hat man gefunden, daß das Gewicht eines Cubikcentimeters atmosphärischer Luft bei 0° Temperatur und $0^{m},76$ Barometerstand

$$0^{gr},001299075$$

ist, woraus sich das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft entnehmen läßt.

Hat man auf die im vorigen Paragraph angezeigte Weise das Gewicht aufgefunden, welches ein und derselbe Raum bei den verschiedenen Luftarten hat *), so läßt sich leicht durch Rechnung finden, wie vielmal das Gewicht

*) Dieses Geschäft ist jedoch ein höchst mühseliges, indem man hierbei auf vollkommene Reinheit und Trockenheit der Luft, deren Gewicht man bestimmen will, auf die Beschaffenheit der atmosphärischen Luft, in welcher die Wägungen geschehen, auf Temperatur, wodurch die Räume andere werden können, möglichste Rücksicht nehmen muß, weil alle diese Elemente großen Einfluß auf das Ergebniß haben. Um einen Begriff davon zu geben, wie leicht Irrungen hier möglich werden, brauche ich blos anzuführen, daß, nachdem Biot und Arrago mit aller Sorgfalt das specifische Gewicht von Wasserstoffgas zu

0,07321

bestimmt hatten, Berzelius und Dulong dasselbe gleich 0,0688 fanden unter Berücksichtigung des Umstandes, daß in Wasser gelöste Luft aus diesem ausgetrieben wird, wenn man andere Luft durch dieses Wasser streichen läßt.

eines Raumes von der einen Luftart das Gewicht desselben Raumes von einer andern Luftart in sich enthält; man braucht zu diesem Zwecke nur das gefundene Gewicht der erstern Luftart durch das der zweiten zu dividiren. Man pflegt hierbei immer das Gewicht der atmosphärischen Luft zum Divisor zu machen und erhält zum Quotienten das specifische Gewicht der andern Luftart auf atmosphärische Luft bezogen. Man legt der Bestimmung des specifischen Gewichts der Luftarten nicht gern, wie festen und wasserförmigen Körpern, das Wasser zu Grunde, weil zwischen ihm und Luft ein gar zu großer Absprung in Bezug auf Dichtigkeit ist, und man deßhalb für die specifischen Gewichte der luftförmigen Flüssigkeiten gar zu kleine Brüche fände. Wo es indessen wünschenswerth erscheint, die specifischen Gewichte der Luftarten ebenfalls auf das Wasser zurückzuführen, da kann es mittelst einer einfachen Operation geschehen, weil man das Verhältniß der Dichtigkeit von reinem Wasser zu der von atmosphärischer Luft kennt, nach Anleitung der kurz zuvor mitgetheilten Bestimmung. Es folgt nun eine Tabelle von den auf atmosphärische Luft bezogenen specifischen Gewichten der luftförmigen Flüssigkeiten, zu der man auf die beschriebene Weise gekommen ist.

Gase:	Specifisches Gewicht:
Atmosphärische Luft	1,0000
Sauerstoffgas	1,1026
Stickgas	0,9760
Wasserstoffgas	0,0688
Chlorgas	2,440
Stickstoffoxydulgas	1,5273
Stickstoffoxydgas	1,0393
Ammoniakgas	0,5912
Cyangas	1,8188
Grubengas	0,559
Oelbildendes Gas	0,9840
Kohlenoxydgas	0,9727
Chlorkohlenoxydgas	3,4127
Schwefligsaures Gas	2,2116
Kohlensaures Gas	1,5240
Salzsaures Gas	1,2544
Schwefelwasserstoffsaures Gas	1,1778

Solche Bestimmungen gaben Anlaß zur Auffindung eines sehr wichtigen und einfachen Gesetzes, das in Folgendem besteht.

Schon früher hatte nämlich Gay Lussac entdeckt, daß da, wo sich einfache Luftarten zu einer zusammengesetzten verbinden, dieß immer in sehr einfachen räumlichen Verhältnissen geschieht. So verbindet sich 1 Vol. Sauerstoffgas und 1 Vol. Stickgas zu 2 Vol. Stickstoffoxydgas; 1 Vol. Sauerstoffgas und 2 Vol. Stickgas zu 2 Vol. Stickstoffoxydulgas; 3 Vol. Wasserstoffgas und 1 Vol. Stickgas zu 2 Vol. Ammoniakgas.

Aus der vorstehenden Tabelle nun geht hervor, daß wenn n_1, n_2 die Zahl der Volumina der einfachen Bestandtheile s_1, s_2 deren specifische Gewichte bezeichnen, und N die Anzahl der Volumina nach ihrer Mischung, S hingegen das specifische Gewicht dieser Mischung vorstellt, man stets habe:

$$NS = n_1 s_1 + n_2 s_2 ,$$

mittelst welcher Gleichung man aus zweien der drei Größen s_1, s_2 und S die dritte leicht berechnen kann. Die vorstehende Gleichung aber ist so zu sagen von selbst verständlich, wenn man bedenkt, daß $n_1 s_1$ und $n_2 s_2$ die in beiden Bestandtheilen enthaltenen Massen und NS die in der Mischung enthaltene Masse aussprechen, in dem Falle, daß man diesen Zahlen die in einem Volumen atmosphärischer Luft enthaltene Masse als Einheit zu Grunde legt.

Aus der vorstehenden Tabelle erklärt man sich auch ganz leicht die Möglichkeit der Luftballons. Da nämlich ein Cubikcentimeter atmosphärischer Luft der oben gegebenen Bestimmung gemäß $0^{gr},001299075$ wiegt, so wiegt ein Cubikmeter $1299^{gr},075$ und 1000 Cubikmeter 1299075^{gr} oder 1299,075 Kilogr. Dann aber wiegen 1000 Cubikmeter Wasserstoffgas, dessen specifisches Gewicht 0,0688 ist, $0,0688 \times 1299075$ Gramme oder 89,37636 Kilogramme. Der Unterschied zwischen diesen beiden Gewichten ist 1209,69864 Kilogramme, also, das Kilogramm zu 2 ℔ gerechnet, mehr als 24 Centner; befindet sich daher das Wasserstoffgas auch in einer aus einem festen Körper gebildeten Hülle eingeschlossen, wozu bei den Luftballons gewöhnlich starkes und mit Firniß getränktes Seidenzeug genommen wird, so wird doch noch das Gewicht der atmosphärischen Luft um gar manchen Centner mehr betragen, als das Gewicht des Wasserstoffgases sammt seiner Hülle. Eine Folge hiervon ist, daß dieser Ballon, dem allgemeinen Verhalten fester Körper innerhalb von Flüssigkeiten gemäß, selbst wenn noch Lasten von vielen Centnern ihm angehängt werden, durch eine bedeutende Kraft in lothrechter Richtung von unten nach oben getrieben, somit steigen wird, falls sich derselbe nahe an der Oberfläche der Erde in ihrer Atmosphäre aufhält. Diese Kraft wird allmählig um so geringer werden, je mehr er in die Höhe gelangt ist, weil hier die Luft minder dicht und in Folge das Gewicht eines gleichen Raumes von ihr kleiner wird. Zuletzt wird das Gesammtgewicht des Ballons dem der Luft in der Höhe, wo er sich befindet, gleich werden; dann kann er nicht mehr höher steigen, sondern er wird umgekehrt sich allmählig senken müssen, wegen des

nicht ganz zu vermeidenden Verlustes von Wasserstoffgas, das aus ihm entweicht und dessen Stelle von der äußern Luft eingenommen wird.

Diese Grenze wird um so früher erreicht, weil man meistens während des Steigens, um den innern Druck nicht größer als den äußern werden zu lassen, einen Theil des Wasserstoffgases aus dem Ballon entweichen lassen muß. Unsere Rechnung giebt freilich ein etwas zu großes Resultat, weil sie reines Wasserstoffgas voraussetzt, das aber bei der gewöhnlichen Bereitungsweise nicht erhalten wird.

Kapitel VIII.

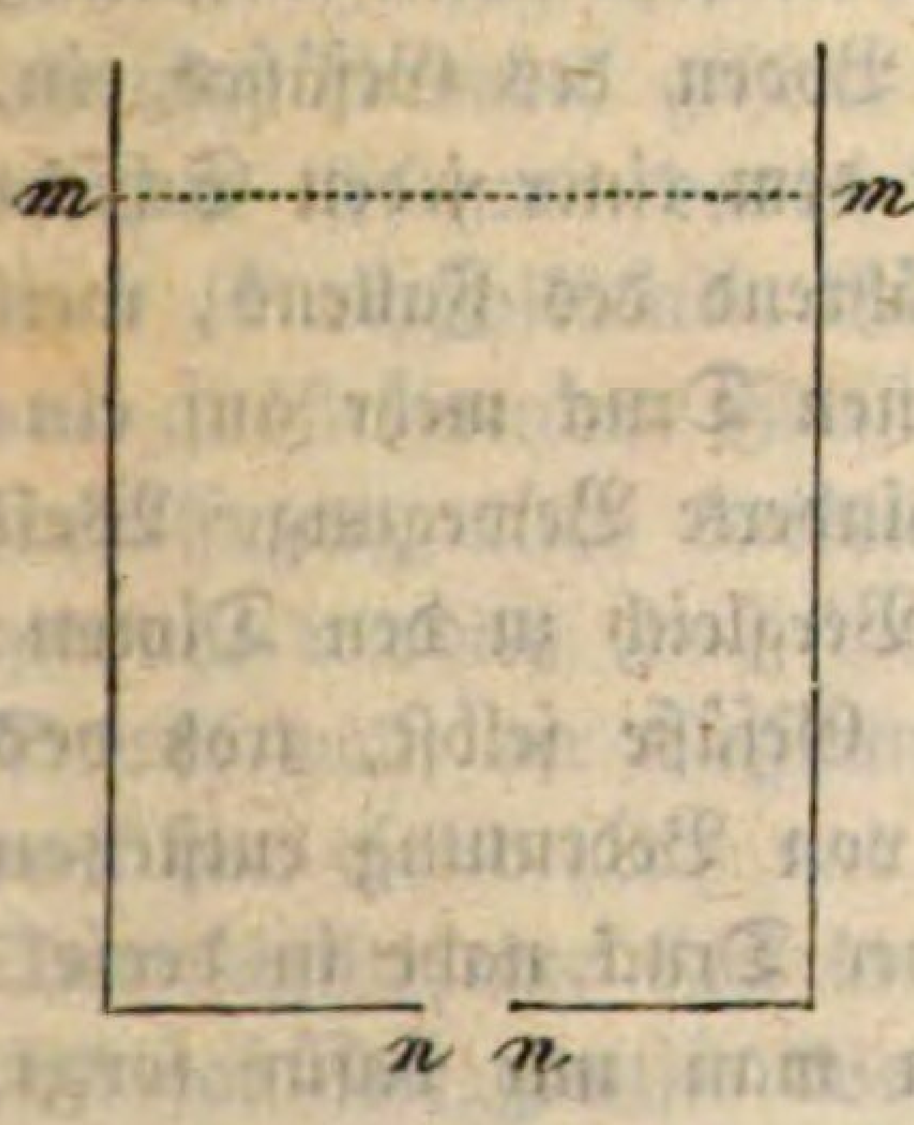
Von der Bewegung schwerer, flüssiger Körper.

§. 45. Bewegung der Flüssigkeiten.

Es sind schon oben im Allgemeinen die Gründe angegeben worden, weßhalb die Verfolgung der Kräfte innerhalb flüssiger Körper auf so große Schwierigkeiten stößt, daß man bis auf den heutigen Tag a priori nur noch zu sehr wenig sichern Resultaten hat gelangen können; daher kommt es, daß wir an der gegenwärtigen Stelle nur einige besondere Fälle, und diese meistens nur an der Hand von Versuchen abhandeln können. Diese sparsamen Fälle sind jedoch solche, welche in den Anwendungen am öftesten vorkommen.

An der Spitze der hier erwähnten, isolirten Ergebnisse steht der von Toricelli aufgefundene Satz, wonach das Theilchen einer schweren, wasserförmigen Flüssigkeit, die in einem Gefäße zur Ruhe gekommen ist, aus einer in die Wand gemachten sehr kleinen Oeffnung mit derselben Geschwindigkeit in einer, auf die Wand an der Stelle der Oeffnung senkrechten Richtung ausfließt, die es durch freien Fall von der Oberfläche der Flüssigkeit oder deren Verlängerung bis zur Oeffnung in der Wand annähme.

Fig. 66.



Dieser Satz läßt sich gewissermaßen theoretisch auf die nachstehende Weise ableiten, wobei wir uns der größern Einfachheit halber eine horizontale Oeffnung im Boden des Gefäßes denken wollen, wie die Fig. 66. anzeigt, in welcher mm die Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäße, nn die Größe der

horizontalen Oeffnung in dessen Boden anzeigt. — Stellt d die Dicke einer Schicht der Flüssigkeit, d. h. den Abstand zweier nächsten Ebenen vor, in denen die Atome der Flüssigkeit vertheilt sind, so läßt sich von der ersten durch die Oeffnung nn fallenden Flüssigkeitsschicht das Folgende aussagen:

Sie würde, wenn sie allein da wäre und um eine Schicht weiter sich bewegt hätte, d. h. um die Höhe d vermöge ihres freien Falles tiefer gekommen wäre, eine Geschwindigkeit erlangt haben, die, wenn wir sie durch V bezeichnen, durch die Gleichung

$$V = \sqrt{2dG} \qquad (1.)$$

gegeben wird, wenn G die Beschleunigung der Schwere ist, der in §. 16. gegebenen Gleichung (7.) gemäß. In dem Augenblicke aber, wo die Oeffnung blosgelegt wird, wird deren äußerste Schicht nicht blos von ihrem eigenen Gewichte, sondern auch von dem Drucke der über ihr liegenden Flüssigkeit in Bewegung gesetzt und dieser ist von solcher Größe, als ob die Gewichte aller lothrecht über ihr liegenden Schichten sich in dieser letzten Schicht vereinigt hätten; es wird demnach diese letzte Schicht in Folge des auf ihr lastenden Drucks mit viel größerer Beschleunigung fallen müssen als ohne ihn. Bezeichnet man diese größere Beschleunigung mit G′ und die daraus hervorgehende Geschwindigkeit, womit die letzte Schicht um eine Schicht tiefer rückt, mit V, so wird wie zuvor

$$V = \sqrt{2dG'} . \qquad (2.)$$

Nun ist aber offenbar

$$G : G' = d : h , \qquad (3.)$$

wenn h die lothrechte Entfernung der Oeffnung von der Oberfläche der Flüssigkeit, d. h. die Dicke aller über der Oeffnung liegenden Schichten bedeutet, woraus sich $dG' = hG$ ergiebt; setzt man aber diesen Werth von dG' in die Gleichung (2.) ein, so wird diese:

$$V = \sqrt{2hG} , \qquad (4.)$$

und enthält nun den Toricellischen Satz in sich.

Man sieht aus unserer Darstellung sogleich ein, daß dieser Werth von V blos die Geschwindigkeit der untersten Schicht durch die sehr kleine Oeffnung hindurch anzeigt. Nähme die Oeffnung den ganzen Boden des Gefäßes ein, so würde gleichzeitig die ganze Wassermasse fallen mit dem einer jeden Schicht entsprechenden Druck, und diese Schichten würden während des Fallens, weil jede ihrem Trieb zur Bewegung frei folgen kann, keinen Druck mehr auf einander ausüben; denn Druck ist nichts anders als gehinderte Bewegung. Weil wir indessen die Größe der Oeffnung sehr klein in Vergleich zu den Dimensionen des Gefäßes angenommen haben, so wird im Gefäße selbst, trotz des Ausflusses aus der Oeffnung, doch keine Bewegung von Bedeutung entstehen können, und in Folge dessen wird sich in demselben der Druck nahe in derselben Weise wie zuvor an jeder Stelle bilden, wenn man nur dafür sorgt,

daß die Höhe der Flüssigkeit im Gefäße stets die gleiche bleibt. Darum bleibt die Gleichung (4.), wiewohl sie stets zu große Resultate liefern wird, noch während des Auslaufens aus der Oeffnung annähernd anwendbar, und zwar nicht blos, wenn diese eine horizontale Lage hat, sondern auch noch wenn sie irgend eine andere Lage im Boden oder in den Seitenwänden hat; nur muß dann unter h die Entfernung ihres Schwerpunkts, der gewöhnlich ihre Mitte ist, von der Oberfläche verstanden werden, den in §. 31. gegebenen Auseinandersetzungen zur Folge. In diesem Sinne sagt die Gleichung (4.) aus, daß die Geschwindigkeit, womit eine Flüssigkeit aus irgend einer in die Wand des Gefäßes gemachten Oeffnung ausfließt, stets der Quadratwurzel aus der Entfernung des Schwerpunkts dieser Oeffnung vom Flüssigkeitsspiegel proportional und gänzlich unabhängig von der Natur der Flüssigkeit ist. Diese theoretische Geschwindigkeit übertrifft jedoch die aus den Versuchen sich ergebende immer merklich, obschon um so weniger, je mehr man alle Hindernisse der Bewegung zu vermindern Bedacht nimmt.

Wäre die Geschwindigkeit aller aus einer Oeffnung heraustretenden Flüssigkeitstheilchen wirklich die durch die Gleichung (4.) gegebene V, so müßte die in einer Secunde aus dieser Oeffnung ausfließende Flüssigkeitsmenge M sein:

$$M = V \, . \, f \, , \qquad (5.)$$

wenn f die Größe der Oeffnung vorstellt. Die Versuche aber zeigen, daß die wirkliche Ausflußmenge beträchtlich kleiner ist, als die aus der Gleichung (5.) sich ergebende; sie macht nur 64 Procent von dieser aus, wenn die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand angebracht ist, 84 Procent, wenn die Ausflußöffnung durch den innern Querschnitt einer cylindrischen Röhre gebildet wird, deren Länge viermal so groß ist, als ihr Durchmesser, und sie kann bei andern Formen der Ansatzröhren noch beträchtlich weiter getrieben werden. Dieser sehr merkliche Unterschied zwischen der wirklichen und der nach der Gleichung (5.) berechneten Ausflußmenge hat ohne Zweifel darin seinen Grund, daß die Flüssigkeitstheilchen nicht in parallelen Richtungen durch die Ausflußöffnung hindurch gehen, wie bei Aufstellung der Gleichung (4.) vorausgesetzt worden ist; und davon scheinen auch die Veränderungen herzurühren, welche man in verschiedenen Entfernungen von der Ausflußöffnung am Querschnitt des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls wahrnimmt, besonders wenn die Ausflußöffnung nicht kreisförmig ist. Schon im Innern des Gefäßes kann man gewahr werden, daß die Flüssigkeitstheilchen nicht blos in der Richtung des Drucks nach der Oeffnung sich hindrängen, sondern auch in allen Richtungen von der Seite her; und zur Oeffnung herausgetreten, verengert sich noch ihr Querschnitt eine Zeit lang, bis er am kleinsten geworden ist, von wo aus er bis auf eine gewisse Weite hin scheinbar gleiche Größe behält und der Strahl

selbst völlig durchsichtig erscheint. Noch weiter hin zerfällt der Strahl in discontinuirliche Theile, die abwechselnd breiter und wieder schmäler werden, indem sie gewissermaßen Bäuche und Knoten im Strahle bilden. Weil jedoch diese Bäuche und Knoten stets an derselben Stelle bleiben, so scheint es, daß die Bäuche in die Breite gezogene Tropfen, die Knoten hingegen in die Länge gezogene in sich enthalten. Diese Veränderungen im ausfließenden Strahle, welche sich am besten an einem abwärts gerichteten beobachten lassen, haben noch keine rationelle Ableitung gefunden, wie denn überhaupt eine wahre theoretische Einsicht in diesen Gegenstand noch viel zu wünschen übrig läßt. Wegen der unzureichenden Theorie, die fast in allen Fällen, wo die Bewegung von Flüssigkeiten in's Spiel kommt, in gleichem Maaße vorhanden ist, werde ich nur noch kurz die wichtigsten Resultate anführen, zu denen man auf dem Wege des Versuches gekommen ist.

In Kanälen, deren Ufer geradlinig sind und die überall ein gleiches Profil haben, ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Mitte des Kanals und an seiner Oberfläche am größten; nennt man diese Geschwindigkeit V, und stellt M die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Q hindurch strömende Wassermasse vor, so ist:

$$M = 0,8 \times VQ.$$

Prony hat aus vielen Versuchen an gußeisernen Röhren die Gleichung

$$V = 26,79 \,.\, \sqrt{\frac{DH}{L}}$$

entnommen, in welcher D den innern Durchmesser der Röhre, L ihre Länge und H die lothrechte Erhebung des Wasserniveaus über das Ende der Röhre, V hingegen die auf die Secunde bezogene Geschwindigkeit des aus der Röhre hervorströmenden Wassers vorstellt. Hierbei hat man der Zahl V dieselbe Längeneinheit, nämlich den Meter, beizulegen, in welcher die Größen D, H und L ausgedrückt worden sind. Diese Gleichung stimmt recht gut mit den Versuchen überein, so lange D nicht kleiner als 1 Centimeter wird, und $\frac{D}{L}$ nicht mehr als $\frac{1}{100}$ beträgt.

Was das Ausströmen von luftförmigen Körpern anlangt, so haben Schmidt's Versuche dargethan, daß alle Luftarten, wenn sie aus engen, in den Reservoirs, worin sie comprimirt sind, angebrachten Oeffnungen hervorströmen, einerlei Gesetze befolgen, und zwar dieselben, welche in den Gleichungen (4.) und (5.) für wasserförmige Flüssigkeiten aufgestellt worden sind; nur hat man unter h die Höhe einer Luftsäule zu verstehen, deren Dichtigkeit constant und die des comprimirten Gases ist, und deren Gewicht dem Unterschied des Druckes zwischen dem eingeschlossenen Gase und der äußern Luft entspricht. Auch darin stimmen Schmidt's Versuche mit den analogen an wasserförmigen Flüssigkeiten gemachten überein, daß die wirkliche Geschwindigkeit der Luft

immer kleiner als die nach der Gleichung (4.) berechnete ist, und daß deren Größe von der Form der Mündung, aus welcher das Gas hervortritt, abhängig ist. Dieser Beobachter fand, daß die Geschwindigkeit des Gases um $\frac{2}{13}$ die übertrifft, welche es durch die in einer dünnen Platte angebrachte Oeffnung fließend annimmt, wenn man es aus einer cylindrischen Ansatzröhre von höchstens 1 Zoll Länge hervortreten läßt, und daß man die größte Geschwindigkeit erhält, wenn man der Ansatzröhre eine nach außen sich erweiternde conische Form giebt, deren Durchmesser am äußern Ende doppelt so groß als am innern Ende ist, während die Länge dieser Ansatzröhre das Fünf- bis Zehnfache von ihrem kleinsten Durchmesser beträgt.

Girard stellte Versuche im Großen über das Strömen von atmosphärischer Luft und Steinkohlengas durch eine 623 Meter lange Röhre von 81 Millimeter Durchmesser an, aus denen sich ihm die folgenden Resultate ergaben:

1) Das Steinkohlengas und die atmosphärische Luft erleiden in derselben Röhre denselben Widerstand bei gleichem Grade der Compression und befolgen überhaupt, unabhängig von ihrem specifischen Gewichte, einerlei Gesetz.
2) Der Widerstand, den die Bewegung der Gase durch Röhren erfährt, ist den Quadraten ihrer mittleren Geschwindigkeiten proportional.
3) Die Mengen der aus Röhren von gleicher Weite ausströmenden Luft sind den Quadratwurzeln der das Ausströmen bewirkenden Drückungen direkt und den Quadratwurzeln der Röhrenlängen umgekehrt proportional.

Kapitel IX.

Von den Hindernissen, denen die Bewegung eines Körpers ausgesetzt ist.

---

§. 46. Von der Reibung und der Steifigkeit der Seile.

Schon oben haben wir darauf aufmerksam gemacht, daß ein fester Körper, der sich in einer Flüssigkeit bewegt, einen Theil seiner Kraft darauf verwenden muß, die Theilchen dieser Flüssigkeit sich aus dem Wege zu treiben, welchen Verlust an Kraft wir den Widerstand der Flüssigkeit genannt, und dessen Größe dort annähernd bestimmt haben. Außer diesem Hindernisse, dem jeder auf unserer Erde durch die sie umgebende Luft bewegte Körper begegnet, so wie jeder in ihren Flüssen, Seen oder Meeren von einer Stelle zu einer

andern übergehende, giebt es jedoch noch andere, von denen die wichtigsten hier aufgezählt werden sollen.

Eines von den Hindernissen der Bewegung, welche sich im Haushalte der Natur am häufigsten geltend machen, ist das, welchem man den Namen Reibung gegeben hat. Man versteht darunter die Kraft, welche erforderlich ist, um einen schweren Körper in horizontaler Richtung über eine horizontale Ebene weg in Bewegung zu bringen. Die Ursache der Reibung scheint hauptsächlich in der Formveränderung zu liegen, der zwei gegen einander gedrückte Körper ausgesetzt sind, wie denn auch aus den Versuchen hervorgeht, daß die Reibung im Allgemeinen dem Drucke zwischen den beiden sich reibenden Körpern proportional ist. Die Versuche haben ferner gezeigt, daß die Reibung während der Bewegung geringer ist, als da, wo die Bewegung erst aus der Ruhe hervorgehen muß, und daß sie nach längerer Ruhe größer ist, als nach kürzerer; ferner daß sie bei manchen Körpern, wie z. B. den Hölzern, viel längere Zeit hindurch, nachdem die Ruhe eingetreten ist, noch anwächst, als bei andern Körpern, wie z. B. den Metallen; lauter Eigenschaften, welche dem Ursprunge der Reibung aus einer Formveränderung der sich reibenden Körper das Wort reden. Man hat ferner bemerkt, daß ein schwerer Körper mit derselben Stärke sich an einer horizontalen Ebene reibt, er mag diese in einer größern oder kleinern Fläche berühren, und auch diese Eigenthümlichkeit der Reibung ist mit der Annahme, daß die Reibung aus einer Formveränderung der Körper hervorgeht, nicht unverträglich.

Bei dieser Ansicht vom Ursprung der Reibung müßte man annehmen, daß die sich reibenden Körper in einander, wenn auch noch so wenig, einsinken, und daß das Maximum dieses Effekts bei den verschiedenen Körpern nach Ablauf einer verschieden langen Zeit eintritt. Die Reibung wäre unter dieser Voraussetzung die Kraft, welche zur Ausgleichung der einer anfangenden Bewegung entgegenstehenden Erhebungen und Vertiefungen erforderlich ist und müßte nothwendig größer werden, wenn der Druck mehr auf dem vordern Theil des zu bewegenden Körpers lastet, als wenn sein hinterer Theil stärker an die horizontale Unterlage angedrückt wird, worüber meines Wissens keine Versuche bis jetzt noch angestellt worden sind. Aber auch außerdem hat die Reibung noch andere Eigenthümlichkeiten, die sich nicht mehr so ganz einfach aus einer bloßen Formveränderung der Körper herleiten lassen, und daher zu einer weiter fortgesetzten experimentellen Untersuchung des Gegenstandes auffordern. Dahin gehört die Wahrnehmung, daß verschiedenartige Körper sich weniger stark an einander reiben als gleichartige, daß Hölzer, deren Fasern sich kreuzen, eine geringere Reibung zeigen, als bei paralleler Lage der Fasern, endlich daß Körper aller Art mit größerer Leichtigkeit über einander weggleiten, wenn die einander berührenden Flächen zuvor mit Fett oder einem fettartigen Körper bestrichen werden. In diesem letztern Falle namentlich scheint sich noch

ein anderer Widerstand mit der Reibung zu vermählen, der mit der Größe der Berührungsflächen wächst, und aus der Adhäsion dieser Flächen an einander zu entspringen scheint.

In der ausübenden Mechanik macht sich häufig noch ein anderes Hinderniß der Bewegung geltend, das unter dem Namen **Steifigkeit der Seile** bekannt geworden ist. Dieses Hinderniß scheint in der Eigenthümlichkeit mancher Körper, wie Leder, Gewebe und Geflechte zu liegen, daß diese, wenn sich ein fester Körper mit starker Pressung über ihnen wegschiebt, Theilen von ihrer Oberfläche bis auf eine gewisse Weite eine Verdrängung zur Seite in der Richtung der Bewegung gestatten, wodurch vor dem bewegten Körper her ein Wulst sich bildet, der einer weitern Fortbewegung hindernd in den Weg tritt, und Folgen verschiedener Art mit sich führen kann. Ein über eine Rolle gezogenes Seil, an welchem eine Last in die Höhe gezogen wird, schiebt sich immer mit neuen Stellen an die Rolle an, daher entsteht an seinem gegen die Rolle sich anlegenden Theile, zunächst an dieser, ein Wulst, durch den das Seil hier auf die Seite gewiesen und so der Hebelarm der Last vergrößert wird. Auf der Seite der Kraft, wo das Seil die Rolle verläßt, findet keine ähnliche Wirkung statt, daher findet hier nicht in dem Maaße eine Verlängerung des Hebelarms der Kraft statt. Diesem zur Folge muß die Kraft, um eine Hebung der Last zu bewirken, größer als diese werden, welcher Ueberschuß eben der Steifigkeit des Seils zugeschrieben worden ist.

Hat die Reibung, wie wir vermuthen, hauptsächlich in der Nachgiebigkeit der an einander gepreßten Körper ihren Grund, so wären Reibung und Steifigkeit des Seils verwandtere Erscheinungen, als es beim ersten Blick den Anschein hat; beide Hindernisse fänden ihren Grund in der Gestaltsänderung, welche durch den Druck zweier über einander hingleitender Körper hervorgerufen wird, und es käme dabei begreiflicherweise nicht sowohl auf die Größe der Veränderung als auf ihre specielle Beschaffenheit an. Es versteht sich übrigens von selbst, daß da, wo die Seile durch Ketten vertreten werden, der Hergang von ganz anderer Art ist, und nicht wohl mit den beiden vorigen verglichen werden kann.

Kapitel X.

Von den Schwingungen der Körper.

§. 47. Von der Elastizität und den durch sie eingeleiteten Schwingungen der Körper.

Bereits in der Einleitung ist auf das Vermögen der Körper aufmerksam gemacht worden, ihren alten räumlichen Zustand wieder herzustellen, nachdem dieser durch äußere Einwirkung abgeändert worden war. Diese Rückkehr der Theile eines Körpers in ihre frühern Stellungen unmittelbar nach dem Abgang der äußern Kräfte, durch welche sie diese Stellungen zu verlassen gezwungen wurden, ist offenbar eine Wirkung der im Innern des Körpers von Atom zu Atom thätigen Kräfte; jenes Vermögen, dem wir den Namen Elastizität gegeben haben, hat mithin seinen Ursprung in den Molecularkräften selber, und wird deßwegen in Körpern von verschiedener Anordnung ihrer kleinsten Theile in sehr abgeänderter Weise sich kundgeben müssen. In flüssigen Körpern, die einer Verschiebung ihrer Theile an einander keine merkbare Kraft entgegenstellen, kann sich die Elastizität kaum anders offenbaren, als da, wo eine größere Annäherung ihrer Theile gegen einander oder eine größere Entfernung derselben von einander angestrebt wird; bei ihnen trifft die Elastizität nicht sowohl die Gestalt der Räume als deren Größe. In diesem beschränktern Sinne jedoch kann man die Elastizität der flüssigen Körper eine absolute nennen, denn sie nehmen genau denselben Raum ein, wie zuvor, wenn die Kräfte, welche ihn abgeändert haben, wieder abgetreten sind. Dieses Verhalten in Bezug auf Raumveränderung ohne Formveränderung haben die festen Körper mit den flüssigen gemein, aber wie es scheint, nicht in derselben vollkommenen Weise; denn feste Körper lassen sich z. B. durch Hämmern bleibend dichter machen, wiewohl sich für das Nachhaltige einer solchen Raumveränderung auch noch besondere Ursachen auffinden lassen dürften. Wie dem aber auch sein mag, so viel ist gewiß, daß die festen Körper neben dieser, vorzugsweise die Größe ihres Raumes angehenden Elastizität noch eine zweite besitzen, bei welcher nicht sowohl die Größe des Raumes, den sie einnehmen, als die Form, wie sie ihn einnehmen, in Anspruch genommen wird. Feste Körper ändern durch Zug, Druck, Biegung, Drehung ihre Form ab, und äußern dabei das Bestreben, wieder in ihre alte Form zurückzukehren in sehr verschiedenem Grade; bald nehmen sie die frühere Form wieder vollkommen an, bald nur theilweise,

zuweilen auch kaum merklich, und es zeigen sich diese verschiedenen Grade der Elastizität nicht blos bei Körpern von verschiedenem Stoffe und gleicher Formveränderung, sondern auch an demselben Körper bei Formveränderungen von verschiedener Größe. Jedoch nimmt man bei jedem festen Körper ein vollkommenes Zurückgehen in die alte Form wahr, so lange die Formveränderung gewisse Grenzen nicht überschreitet, die bei manchem Körper sehr enge gesteckt sind, bei andern aber weit aus einander liegen können. Eine gute ebene Stahlfeder kann sich bis zum Kreise biegen lassen, ohne beim Zurückspringen ihre ebene Gestalt zu verlieren, während man die Form eines ähnlichen Bleistreifens kaum wenig genug verändern kann, ohne daß er aufhört, seine ursprüngliche Form wieder völlig anzunehmen. Manche Körper, wie z. B. Glas, die, ohne zu zerbrechen, ihre Form nicht beträchtlich ändern lassen, zeigen sich aber innerhalb dieser Grenze als vollkommen elastische Körper. Im Allgemeinen nennt man die Grenze der Formveränderung, die ein bestimmter Körper zuläßt, ohne aufzuhören, wieder völlig in seine ursprüngliche Gestalt zurückzukehren, die Grenze seiner vollkommenen Elastizität. Durch ältere Versuche von s'Gravesande, sowie durch neuere von Coulomb, ist außer Zweifel gestellt worden, daß bei festen Körpern innerhalb der Grenze ihrer vollkommenen Elastizität die Größe der Formveränderung immer der darauf verwendeten Kraft proportional ist. Dieses Gesetz, welches man zwischen der Größe der Formveränderung eines festen Körpers innerhalb der Grenze seiner vollkommenen Elastizität und der dazu erforderlichen Kraft aus den Versuchen abgeleitet hat, steht im Einklang mit jenem, welches das Experiment zwischen den Dichtigkeitsänderungen der flüssigen Körper und den dabei verwendeten Kräften an die Hand gegeben hat, wozu auch das Mariott'sche Gesetz gehört. Es scheint demnach die Proportionalität zwischen der Kraft und der aus ihr entspringenden Formveränderung auf räumliche Veränderungen der Körpertheile aller Art anwendbar zu sein, und die Mechanik lehrt, daß unter Zugrundlegung dieses Gesetzes jedes Körpertheilchen, das in Folge einer räumlichen Abänderung des Körpers aus seiner ursprünglichen Lage abgeführt worden ist, beim Verschwinden der abführenden Kräfte gleich viel Zeit braucht, um in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren, wie klein oder wie groß auch der Unterschied zwischen den beiden Lagen sein mag, nur darf dieser die Grenzen der vollkommenen Elastizität nicht überschreiten. Eine Folge hievon ist, daß, wenn ein Körper durch irgend Kräfte die gegenseitige Lage seiner Theile innerhalb der Grenzen seiner vollkommenen Elastizität abzuändern veranlaßt wird, diese sämmtlich beim Nachlasse der abändernden Kräfte in derselben Zeit in ihre ursprüngliche Lage zurückkommen, diese aber vermöge der während dieser Bewegung in ihnen angesammelten Kraft überschreiten und so Schwingungen um ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage, die sämmtlich eine und dieselbe Dauer haben, machen werden. Man

drückt diese Eigenthümlichkeit der aus der Elastizität eines Körpers hervorgehenden Schwingungen gewöhnlich so aus, daß man sagt: die Schwingungen eines elastischen Körpers sind isochron.

Die Schwingungen der elastischen Körper haben seit mehr als einem Jahrhundert die tüchtigsten Köpfe in Bewegung erhalten, woraus eine so große Menge neuer Thatsachen, zugleich aber auch so fruchtbare neue Behandlungsweisen der schwierigsten physikalischen Aufgaben hervorgegangen sind, daß sich schwer entscheiden läßt, auf welcher Seite der größere Gewinn liegt, ob auf der reellen oder auf der formellen. Die dahin gerichteten theoretischen Untersuchungen waren genöthigt, in die größten Tiefen der Wissenschaft hinabzusteigen, und konnten auf dem Gebiete der Physik nicht Eroberungen machen, ohne gleichzeitig auch das der Mathematik zu bereichern. Von den vielen auf diese Weise erhaltenen neuen Resultaten können begreiflicherweise hier nur die allereinfachsten zur Sprache kommen.

Man wußte schon vor langer Zeit, daß die Schwingungen der elastischen Körper, wenn sie zwischen bestimmten Grenzen liegen, durch das Intermedium der Luft von unserm Ohr empfunden werden, in welchem sie das Gefühl erzeugen, welches wir Klang oder Ton nennen, wenn die Schwingungen innerhalb der Grenzen einer vollkommenen Elastizität geschehen und deßhalb völlig isochron sind. Ebenso wußte man, daß der Ton um so höher wird, je schneller die Schwingungen geschehen, um so tiefer, je langsamer diese sich gestalten; man nannte Schwingungsdauer die zur Vollendung einer ganzen Schwingung erforderliche Zeit, d. h. die Zeit, welche zwischen zwei nächsten ursprünglichen Lagen des schwingenden Körpers vorübergeht. Bezeichnet in einem bestimmten Falle T diese Schwingungsdauer in Sekunden ausgedrückt, wobei meistens T ein nur kleiner ächter Bruch sein wird, so ist $\frac{1}{T}$ die Anzahl der in einer Sekunde vorübergehenden Schwingungen; diese Anzahl hat den Namen der Schwingungszahl oder Schwingungsmenge erhalten, und von ihr hängt die Höhe des Tones ab. Bezeichnet man diese Schwingungszahl mit n, so ist also

$$n = \frac{1}{T} \qquad \text{oder} \qquad nT = 1\,. \qquad (1)$$

Von dem Verhältniß der Schwingungszahlen zweier Töne zu einander hängt der harmonische Werth dieser Töne ab; man hat nämlich gefunden, daß folgende ToninterValle den beigesetzten Verhältnissen zwischen ihren Schwingungsmengen entsprechen:

Namen des Intervalls zwischen zweien Tönen:	Verhältniß der Schwingungsmenge des tiefern Tons zu der des höhern:
Octave	1 : 2
Quinte	2 : 3
Quarte	3 : 4
große Terz	4 : 5
kleine Terz	5 : 6
große Sext	3 : 5
kleine Sext	5 : 8

Die in diesen Intervallen vorkommenden Verhältnisse der Schwingungsmengen zweier Töne sind die einfachsten innerhalb derselben Octave und gehen bis an die Grenze solcher zweier Töne, die gleichzeitig auf das Ohr einwirkend in diesem ein angenehmes Gefühl erregen, eine Consonanz oder einen Wohlklang bilden, wobei jedoch auch jeder Ton durch seine Oktave ersetzt werden darf. Zwei Töne, deren Schwingungsmengen ein zusammengesetzteres Verhältniß haben, geben, gleichzeitig im Ohr auftretend, eine Dissonanz oder einen Uebelklang. So ist schon der Zusammenklang zweier Töne, deren Schwingungsmengen, im Verhältniß von 6 : 7 stehen, unserm Ohre nicht mehr sehr angenehm, es steht an der Grenze zwischen Wohl- und Uebelklang. Drei Töne, welche paarweise consonirend sind, bilden gleichzeitig auf das Ohr einwirkend das, was man Dreiklang oder Akkord nennt. Bei der geringen Anzahl von Consonanzen läßt sich voraussehen, daß auch die Anzahl der möglichen Dreiklänge nicht groß sein werde; man findet deren sechse. In dreien von ihnen, welche man harte nennt, stehen die Schwingungsmengen der drei Töne in den folgenden Verhältnissen zu einander:

4 : 5 : 6 ; 12 : 15 : 20 ; 3 : 4 : 5 ;

in den drei andern, welche weiche genannt werden, stehen deren Schwingungsmengen in den nachstehenden Verhältnissen:

10 : 12 : 15 ; 5 : 6 : 8 ; 15 : 20 : 24 .

Aus der Natur solcher Verhältnisse lassen sich nicht allein die verschiedenen in unserer heutigen Musik üblichen Tonscalen herleiten, sondern sie geben auch die Elemente für jenen Theil der theoretischen Musik her, welchen man die Harmonielehre nennt.

§. 48. Von den verschiedenen Schwingungsweisen eines und desselben Körpers. Klangfiguren.

Man wird sich nicht sehr wundern, wenn man wahrnimmt, daß eine gespannte Saite, ein an einer Stelle festgehaltener Stab, oder eine zwischen

den Fingern gehaltene Platte anders schwingt und andere Töne hören läßt, wenn sie in ganz anderer Weise zu einer Aenderung ihrer Form Veranlassung erhalten. So schwingt eine gespannte Saite ganz anders und giebt sehr verschiedene Töne, wenn man sie einmal mit einem Fidelbogen senkrecht gegen ihre Länge streicht, und einandermal in schiefer Richtung und so, daß deren Theile mehr zu einer Bewegung längs der Saite angereizt werden. Man kann den Unterschied zwischen diesen zweierlei Schwingungen, von denen die ersteren transversale, die letzteren longitudinale heißen, mit Augen sehen, wenn man die Saite mit kleinen, etwas gebogenen Papierstreifchen stellenweise überlegt; im erstern Falle nehmen diese eine hüpfende, im andern Falle dagegen eine eigenthümlich gleitende Bewegung an. Aehnliche Unterschiede bieten Stäbe und Scheiben dar, je nachdem man deren Theile zu einer Bewegung auffordert, deren Richtung senkrecht oder parallel zu einer Hauptdimension des schwingenden Körpers steht; und auch hier läßt sich der Unterschied zwischen Transversal- und Longitudinalschwingungen wieder unsern Sinnen bemerklich machen, sei es durch Aufstreuen von trockenem Sande oder durch sonst geeignete Mittel. Dabei sind die beiden hier hervorgehobenen Schwingungsweisen nicht die einzigen, welche ein elastischer Körper eingehen kann, indem eine Aenderung in seinem räumlichen Bestehen auf sehr verschiedenem Wege denkbar ist. Wenn aber auch solche Verschiedenheiten der Schwingungen und der sie begleitenden Töne, welche aus einer augenfällig ungleichen Erregungsweise entspringen, nicht gerade sehr befremden können, so wird man es um so auffallender finden müssen, wenn man gewahr wird, wie derselbe Körper bei einer kaum merkbar verschiedenen Erregungsweise, doch Schwingungen von der verschiedensten Art eingehen kann, von denen jede einen andern, nur ihr zukommenden Ton erzeugt. Diese Sonderbarkeit stellt sich bei elastischen Körpern von jeglicher Gestalt ein; man findet sie bei Saiten, Stäben, Scheiben, Glocken u. dgl. und überzeugt sich bei einiger Aufmerksamkeit gar bald, daß sie aus einer andern, gleich räthselhaften Eigenschaft der Körper entspringt, sich während der Wiederherstellung ihrer Form in kleinere Theile zerlegen zu können, von denen jeder für sich isochrone Schwingungen von einer und derselben Schwingungsdauer macht, so daß jeder dieser Theile einen und denselben Ton in unserm Ohr erzeugt, und alle zusammen wieder diesen Ton nur in verstärktem Grade. Hierbei muß die große Leichtigkeit unsere Bewunderung erregen, womit derselbe Körper sich bald so, bald anders abtheilt, und jedesmal den Ton erzeugt, welcher der von dem Körper gewählten Abtheilungsweise eigenthümlich ist. Man erkennt diese Theile in welche sich ein schwingender Körper selbstthätig zerlegt hat, daran, daß leichte Körperchen, die man auf den Körper legt, an Stellen, wo zwei solche Theile an einander grenzen, während der Schwingung nicht oder doch nur sehr schwach in Bewegung gerathen, während dieselben Körperchen an

den Stellen, die von dergleichen Grenzen am weitesten abstehen, in heftige Bewegung gerathen, in Folge der sie den Grenzstellen zugeworfen werden, so daß man am Ende eine vollständige Zeichnung von der Abtheilungsweise des schwingenden Körpers erhält. Solche Stellen eines schwingenden Körpers, die während dessen Schwingung in Ruhe verharren, nennt man Schwingungsknoten, so wie jene Stellen, die sich während der Schwingung am heftigsten bewegen, Schwingungsbäuche genannt zu werden pflegen. Um einen Begriff davon zu geben, welche Rücksichten der Experimentator im Auge behalten muß, wenn er eine bestimmte Abtheilungsweise des schwingenden Körpers hervorzurufen beabsichtigt, mögen noch einige der einfachsten Erscheinungen dieser Art an quadratförmigen Platten des Näheren besprochen werden.

Von den unzählig vielen Abtheilungsweisen, welche in solchen quadratförmigen Platten entstehen können und von Chladni in seinen „Entdeckungen über die Theorie des Klanges" beschrieben worden sind, hebe ich die Fig. 67. a. bis f. abgebildeten heraus als die einfachsten und dabei cyclisch in sich zusammenhängenden. In allen diesen Figuren stellen die in dem Quadrate schwarz ausgezogenen Linien die Schwingungsknoten, d. h. die Stellen vor, an denen sich während der Schwingung auf die Platte gestreuter Sand ansammelt, und an den Stellen b befinden sich die Schwingungsbäuche, d. h. die Punkte, wo aufgestreuter Sand am heftigsten weggeworfen wird und nur dann zur Ruhe gelangt, wenn er in die Nähe eines Schwingungsknotens zu liegen kommt. Jedes Viertel von der Fig. 67. a. schwingt gerade so, als wenn es einer (durch punktirte Linien angedeuteten) Platte angehörte, deren Ränder sämmtlich festgehalten werden und die in ihrer Mitte angeschlagen wird. Jedes Viertel der Fig. 67. b. schwingt gerade so, wie eine halb so große quadratförmige (in der Figur durch punktirte Linien ergänzte) Platte, deren Ränder sämmtlich festgehalten werden und die in ihrer Mitte in schwingende Bewegung gesetzt würde; die vier Dreiecke der Fig. 67. b. bringen daher dasselbe Schwingungsresultat zu Stande, wie zwei an ihren Rändern festgehaltene quadratförmige Platten von halber Größe, die gleichzeitig in Schwingung von derselben Stärke versetzt werden. Eben so schwingen die acht Dreiecke der Fig. 67. c. gerade so, wie die vier von den Diagonalen ausgeschnittenen Dreiecke, wenn

Fig. 67. a.

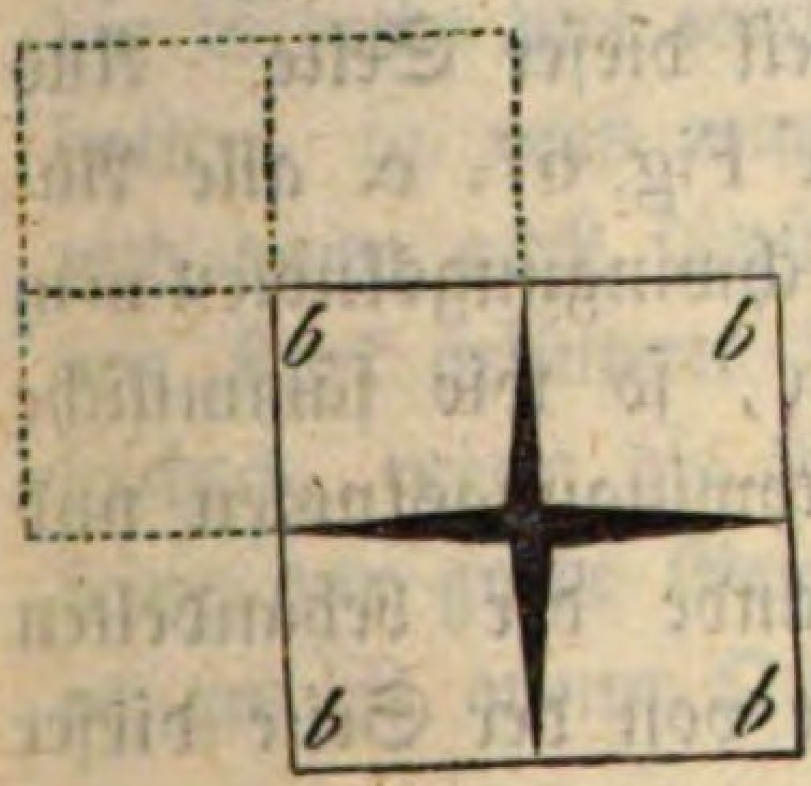


Fig. 67. b.

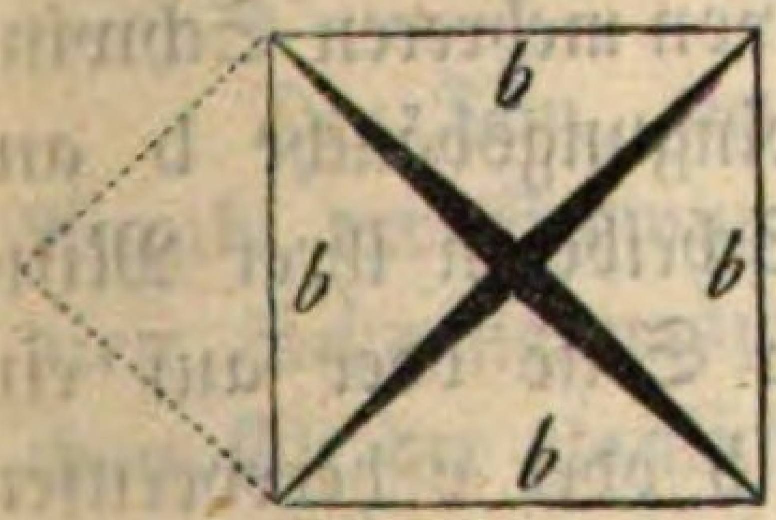


Fig. 67. c.

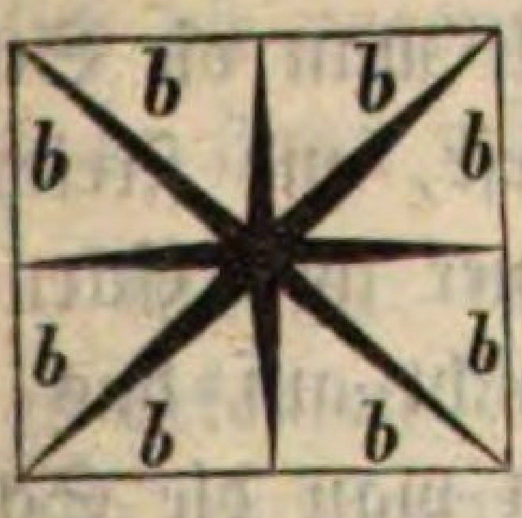


Fig. 67. d.

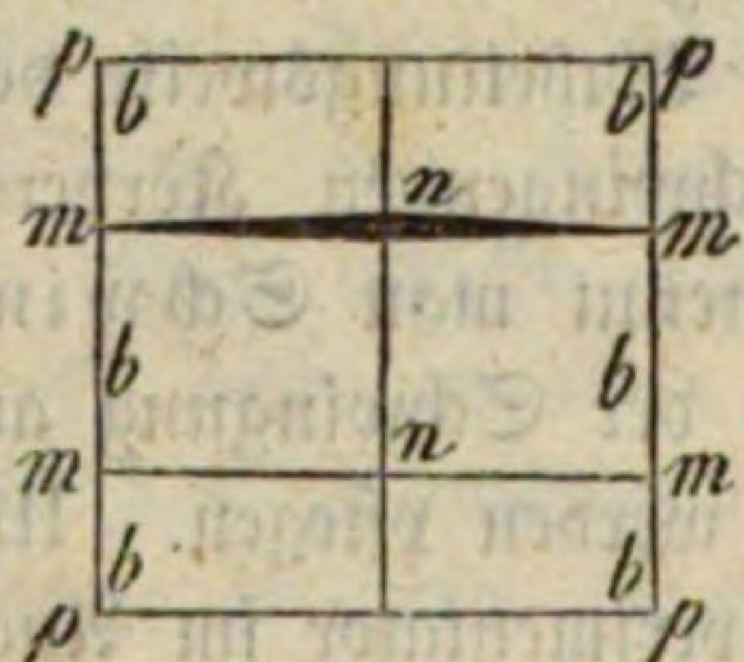


Fig. 67. e.

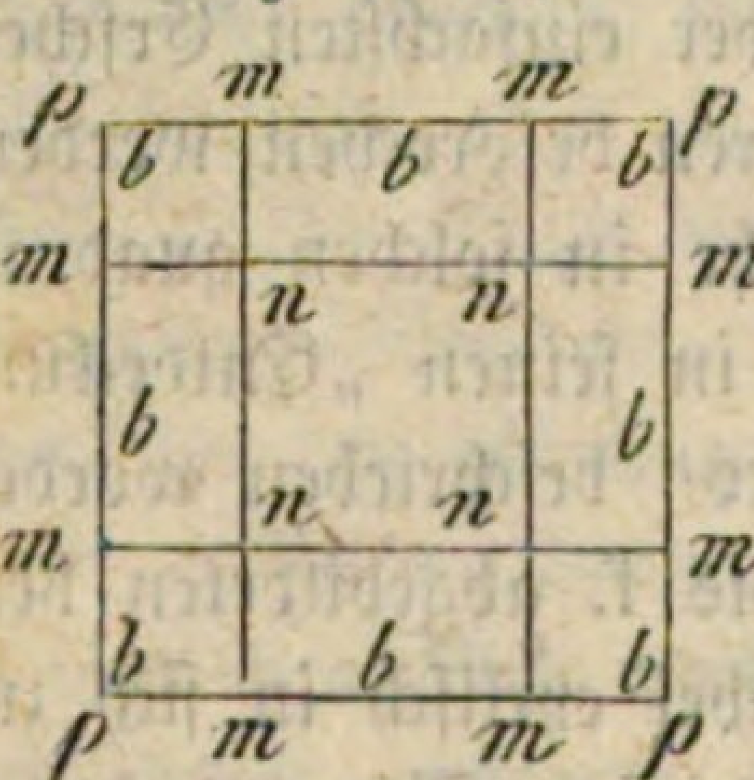
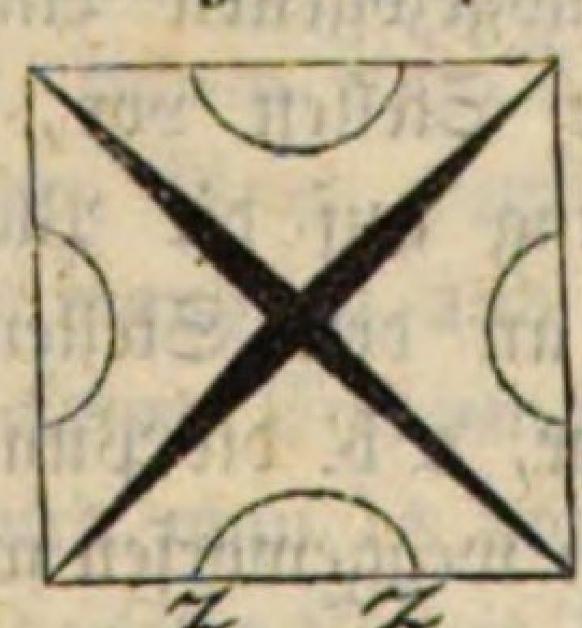


Fig. 67. f.



diese an ihren Rändern festgehalten und gleichzeitig in ihrer Mitte in eine gleich stark schwingende Bewegung versetzt würden. Alle Theile der Fig. 67. d. liefern Schwingungen, wie zwei rechteckige an ihren Rändern festgehaltene Platten, deren eine Seite die Seite des Quadrats, und deren andere Seite halb so groß ist; und sämmtliche Theile der Fig. 67. e. schwingen, wie vier quadratförmige an ihren Rändern festgehaltene Platten, deren Seiten die halbe Länge der zum Versuche genommenen Platte haben, von welchen vier Platten jede das in der Mitte dieser Figur befindliche Quadrat ist. Die Gleichheit der Schwingungen in allen Theilen bringt es mit sich, daß in der Fig. 67. d. alle horizontalen Längen m n, sowie die verticalen m m und n n der halben Seite des zum Versuch genommenen Quadrats gleich sein müssen, alle Längen p m hingegen gleich dem vierten Theil dieser Seite. Aus dem gleichen Grunde sind in der Fig. 67. e. alle Abstände zwischen zwei parallelen Schwingungsknoten m m oder n n gleich der halben Seite, so wie sämmtliche Abstände m p zwischen einem Schwingungsknoten und dem ihm zunächst liegenden Rande der behandelten Scheibe gleich dem vierten Theile von der Seite dieser Scheibe.

Beabsichtigt man eine bestimmte von diesen Figuren zur Anschauung zu bringen, so hält man die Platte an einer Stelle fest, die in einem der Schwingungsknoten oder noch besser in dem Durchschnittspunkte von mehreren Schwingungsknoten liegt und streicht sie bei einem der Schwingungsbäuche b an. Bei jeder der Fig. 67. a. bis c. z. B. kann man die Scheibe in ihrer Mitte festhalten und sie in der Ecke oder in der Mitte einer Seite oder auf ein Viertheil einer Seite streichen, je nachdem man die a, b oder c hervorrufen will; bei der Fig. 67. d. hält man die Scheibe an einer der Stellen n fest, welche in der Mittellinie zwischen zweien parallelen Rändern auf ein Viertheil ihrer Länge liegen, und streicht entweder die Mitte dieser Ränder oder eine von den Ecken der Scheibe an; bei der Fig. 67. e. hält man die Scheibe in einer ihrer Diagonalen auf ein Viertheil ihrer Längen fest, und streicht sie entweder in der Mitte von einem ihrer Ränder oder an einer ihrer Ecken an. Auf diese Weise wird man die verlangte Figur, wenn nicht auf das erste Mal, doch nach ein paar Versuchen jederzeit erhalten. Hält man die Scheibe nicht genau in der rechten Stelle fest, so zeigt sich mitunter doch die gewünschte Figur, jedoch mehr oder weniger verzerrt, und das Gleiche kann geschehen,

wenn man die Scheibe auch an der rechten Stelle hält, diese aber ungleich dicke Stellen hat oder sonst Unregelmäßigkeiten in sich trägt.

Nicht immer sind die eigentlich schwingenden Theile wie in den bisher beschriebenen Fällen lauter congruente Platten. So kann die quadratische Platte auch die in Fig. 67. f. abgebildete Abtheilungsweise annehmen, wo offenbar die schwingenden Theile weder congruent noch geradlinig mehr sind, und sich daher schwieriger einsehen läßt, warum diese Theile doch wieder einen und denselben Ton bewirken. Nichtsdestoweniger wird man auf diese Figur stoßen, wenn man die Mitte der Scheibe festhält, und sie in der Mitte von einem ihrer Ränder streicht, wobei es indessen nöthig werden kann, sie noch in ein paar Stellen z z, die einem Halbkreise angehören, leicht zu berühren, um alle andern Figuren möglichst auszuschließen, die bei derselben Halt- und Streichweise entstehen können.

Zur Erzeugung aller bisher besprochenen Figuren genügt eine nicht zu dicke Glasplatte von ohngefähr vier Zoll Seite; will man aber die Abtheilung der Scheibe viel weiter treiben und beträchtlich zusammengesetztere Figuren erhalten, so muß man größere Scheiben, von etwa einem Fuß Seite nehmen und dann auch künstliche Mittel sie zu halten sich verschaffen, wozu hölzerne, mit Kork gefütterte Klemmen ganz gut dienen können. Die Versuche gelingen leichter, wenn die Ränder der Platte fein abgeschliffen sind; übrigens wird keine gar große Geschicklichkeit in Führung des Bogens dazu erfordert, obschon es gut ist, wenn Ohr und Arm gleichzeitig beim Streichen thätig sind.

§. 49. Abhängigkeit des Tons eines schwingenden Körpers von dessen physikalischer Beschaffenheit.

Der Ton, den ein schwingender Körper von sich giebt, hängt von der Anzahl der Schwingungen ab, die er in einer bestimmten Zeit liefert, und diese Schwingungszahl ist ein Resultat aus allen den Umständen, unter welchen sich der elastische Körper befindet. Dieses Resultat aus den mannigfaltigen Umständen, in denen sich der schwingende Körper befinden kann, abzuleiten, bildet eine der berühmtesten Aufgaben unserer Mechanik, an welcher sich die größten Denker der letztverflossenen Jahrhunderte abmühten, bis durch sie endlich die gegenwärtigen ebenso einfachen wie allgemeinen Lösungen der Aufgabe in ihren möglichen Fällen an's Licht gezogen werden konnten.

Um hier doch wenigstens eine Idee von der bei diesem Wettkampfe zu Tage gekommenen, zuvor nicht geahnten Macht des Geistes geben, und meinen jungen Zuhörern zum Privatfleiß empfehlen zu können, — sehe ich mich genöthigt, die geschichtliche Aufeinanderfolge der heldenmäßigen Eroberungen einzuhalten.

I. Transversalschwingungen einer Saite.

Von vorn herein wurden vorzugsweise die Transversalschwingungen einer Saite in's Auge gefaßt, und man gelangte zu der Gleichung

$$T = 2 \sqrt{\frac{pl}{GP}} \qquad (1.a.)$$

oder mit Hilfe der Gleichung (1.) in §. 47. zu der

$$n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GP}{pl}}, \qquad (1.b.)$$

in welchen beiden Gleichungen p das Gewicht und l die Länge der Saite zwischen ihren befestigten Enden, P die Spannung der Saite als Gewicht ausgedrückt, und G die Beschleunigung der Schwere, dieselbe Größe, welche schon beim freien Falle durch denselben Buchstaben bezeichnet worden ist, vorstellen, und in der ersten T die Dauer einer Schwingung, in der zweiten n die Schwingungszahl der Saite bedeutet. Auch hatte man gleich anfänglich bemerkt, daß die Gleichung (1. b.) nur eine particuläre Auflösung der Aufgabe ist, welche den tiefsten Ton anzeigt, den die Saite geben kann; aus welcher sich jedoch die allgemeine Auflösung der Aufgabe ergiebt, wenn man zu diesem tiefsten Ton noch alle die fügt, deren Schwingungsmengen ganze Vielfache von jener sind. Es sprach sich hierin die Eigenthümlichkeit der Saiten aus, daß sie neben ihrem tiefsten Tone gleichzeitig auch noch alle die höhern hören lassen können, deren Schwingungsmengen Vielfache von der Schwingungsmenge ihres tiefsten Tones sind. Diese Begleitung des tiefsten Tones einer Saite von bestimmten höheren Tönen war schon vordem auf dem Erfahrungswege den Musikern bekannt geworden, und es wurden von ihnen diese Begleittöne die **harmonischen** Töne des tiefsten Tones der Saite genannt.

Da p das Gewicht und l die Länge der Saite ist, so hat man

$$p = \omega \,.\, l \,.\, \alpha,$$

wenn ω den Querschnitt der Saite und α das Gewicht von einer Raumeinheit des Stoffes, woraus sie gebildet ist, vorstellt, so daß

$$pl = l^2 \,.\, \omega\alpha$$

ist. Setzt man diesen Werth von pl in die Gleichungen (1. a.) und (1. b.) ein, so werden sie

$$T = 2l \sqrt{\frac{\omega\alpha}{GP}},$$

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{GP}{\omega\alpha}},$$

und zeigen, **daß die Schwingungsdauer einer gegebenen Saite bei der gleichen Spannung ihrer Länge proportional ist.**

Diese ganze, an sich richtige Lösung hatte schon Taylor, aber unter Voraussetzungen zu Tage gefördert, die der Sache nicht recht auf den Grund sehen ließen. Man konnte sich leicht durch den Versuch überzeugen, daß eine Saite stets die gleiche Wirkung hervorbringt, in welcher von den unendlich vielen denkbaren Weisen sie auch aus ihrem Ruhestande zur Seite abgelenkt worden sein mag, und sah ein, daß eine vollständige Lösung der Aufgabe alle diese möglichen Anregungsweisen der Saite zum Schwingen in sich aufnehmen müsse; aber es fehlte der Mathematik damals noch das Mittel, eine völlig willkührliche Gestalt in die Rechnung einzuführen, man hatte für sie noch keinen Rechnungsausdruck aufgefunden. Diese Schwierigkeit, die offenbar zu überwinden sein mußte, weil die Natur sie thatsächlich zu beseitigen verstand, brachte die größten Köpfe aller Nationen in Aufruhr, und d'Alembert, Daniel Bernoulli, Lagrange leisteten dabei Großes; aber erst in neuester Zeit verbreitete Fourier bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Wärmeverbreitung in den Körpern volles Licht in das Dunkel, und setzte dadurch die theoretische Mechanik in den Stand, gerade die schwierigsten Probleme der Physik mit ungleich größerer Leichtigkeit zu behandeln als zuvor.

II. Longitudinalschwingungen einer Saite.

Nachdem das eben genannte Haupthinderniß überstiegen war, konnten sich die meisten der noch übrigen verschanzten Stellen nicht mehr halten. Man überzeugte sich bald, daß die Längenschwingungen einer Saite in eben so allgemeiner Weise gegeben seien durch die Gleichung

$$T = 2\sqrt{\frac{pl}{GQ}} \qquad (2.a.)$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1.) des §. 49:

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GQ}{pl}}, \qquad (2.b.)$$

worin Q die Spannung der Saite als Gewicht genommen vorstellt, durch welches die ursprüngliche Länge derselben verdoppelt würde, unter Voraussetzung einer gleichen Zunahme der Länge bei gleicher Zunahme der Spannung. Man findet die Größe Q, indem man die Verlängerung δ durch einen Versuch bestimmt, welche die Längeneinheit der Saite durch die gegebene Spannung $\triangle$ erleidet, dann ist nämlich $Q = \frac{\triangle}{\delta}$. Kennt man die Strecke γ, um welche die ganze Länge l der Saite durch die Spannung P vergrößert wird, so wird die Längeneinheit der Saite durch die Spannung P um $\frac{\gamma}{l}$ vermehrt; es ist also unter Voraussetzung einer constanten Verlängerungsfähigkeit der Saite:

$$Q = \frac{P \,.\, l}{\gamma}. \qquad (3.)$$

Nun ergiebt sich aber aus den Gleichungen (1. b.) und (2. b.) das Verhältniß zwischen den Schwingungszahlen einer Saite bei Transversal- und bei Longitudinalschwingungen gleich $\sqrt{\frac{P}{Q}}$, also der Gleichung (3.) gemäß gleich $\sqrt{\frac{\gamma}{l}}$. Dieses aus der Rechnung sich ergebende höchst einfache Verhältniß ist von Cagniard-Latour durch einen unmittelbaren Versuch bestätigt worden, zu dem er eine sehr lange Saite nahm, bei der er im Stande war, die Anzahl ihrer Transversalschwingungen geradezu zu zählen, indem diese langsam genug waren, um einzeln wahrgenommen werden zu können.

Da sich das Verhältniß zwischen den Schwingungszahlen einer transversal und longitudinal schwingenden Saite auch aus den Tönen berechnen läßt, welche die Saite in den beiden Fällen von sich giebt, so hat man, wenn α die so gefundene Zahl bezeichnet,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{l}},$$

woraus sich ergiebt:

$$\gamma = \alpha^2 l; \qquad (4.)$$

man besitzt also hierin ein Mittel, aus den beiden wahrgenommenen Tönen die Verlängerung zu entnehmen, welche die Saite in Folge ihrer Spannung erlitten hat.

III. Schwingungen elastischer Stäbe und Scheiben.

In den 1787 herausgekommenen „Entdeckungen über die Theorie des Klanges" von Chladni findet man, neben den bis dahin an elastischen Stäben gemachten Beobachtungen, eine von dem Verfasser ursprünglich ausgegangene, außerordentlich vollständige experimentale Nachweisung über die verschiedenen Schwingungsweisen elastischer Scheiben von runder oder rechteckiger Form, die ohngefähr alles Thatsächliche enthält, was man bis jetzt von diesem Gegenstande weiß. Auch in theoretischer Beziehung war von Männern, wie Euler, Daniel Bernoulli und Riccati Bedeutendes geleistet worden, das sich jedoch lediglich auf die Schwingungen von Stäben beschränkte und an den Mängeln laborirte, von welchen bei den Schwingungen der Saiten schon die Rede war. Erst nachdem man die dort erwähnten Widerstände zu besiegen gelernt hatte, konnte man sich zu einer erschöpfenden theoretischen Behandlung solcher Aufgaben Hoffnung machen. Seit Fourier's classischer Théorie de la Chaleur kamen dergleichen Arbeiten recht eigentlich an die Tagesordnung und insbesondere that sich Poisson durch eine Reihe von Abhandlungen hervor, deren Gegenstand die Schwingungen der Körper bildeten und worin derselbe insbesondere auch die Schwingungen der Stäbe sowohl wie die der Scheiben auf eine den jetzigen analytischen Hilfsmitteln entsprechende Weise

mit Weglassung aller beschränkenden Voraussetzungen untersucht. Es ist hier nicht der Ort, mich über die dadurch gewonnenen Resultate ausführlicher zu verbreiten, ich muß mich vielmehr begnügen, auf die Cahiers de l'Ecole polytechnique und auf die Mémoires de l'Académie des Sciences Tome VIII. einfach hinzuweisen, in denen man die Originalabhandlungen nachlesen kann.

Ueber die Art, wie mehrere in Berührung mit einander stehende Körper ihre Schwingungen auf einander übertragen, findet man eine reiche Folge von Versuchen in den physikalischen Zeitschriften des laufenden Jahrhunderts, welche vornehmlich von dem französischen Physiker Savart angestellt worden sind. Es hat die Akustik in der Neuzeit von allen Seiten her beträchtliche Fortschritte gemacht, wiewohl an manchen Stellen, wie z. B. bei den Schwingungen der Luftsäulen in unseren Blasinstrumenten noch Vieles zu wünschen übrig bleibt, was insbesondere daher zu kommen scheint, daß solche Säulen ihrer Natur nach keine völlig scharfe Begrenzung gestatten.

§. 50. Vom Schalle in unbegrenzten Mitteln.

Nachdem bis jetzt die aus der Elastizität der Körper hervorgehenden Bewegungen besprochen worden sind für den Fall, daß diese Körper ringsum in enge Grenzen eingeschlossen sind, bleiben uns nun noch die besondern Modificationen kennen zu lernen übrig, wodurch die aus gleicher Quelle herstammenden Bewegungen sich von den bisher betrachteten unterscheiden, wenn der Körper, worin sie geschehen, keine Grenzen hat, oder wenn dessen Grenzen in so großer Ferne liegen, daß sie weder von unsern Sinnen wahrgenommen, noch durch unsern Verstand mit Sicherheit und Bestimmtheit ergriffen werden können. Solche eigenthümlich abgeänderte Erscheinungen begegnen uns nicht selten in der Wirklichkeit, weil unsere Erde von der atmosphärischen Luft umgeben ist, deren Grenzen wir nicht zu erreichen vermögen; ja schon die den festen Kern unserer Erde umgebenden Gewässer, sowie dieser Kern selber sind hieher zu zählen, ihrer großen Ausdehnung und ihrer fast unbekannten Grenzen halber. In so großen Massen fallen Elastizitätsänderungen zu derselben Zeit immer nur in verhältnißmäßig sehr wenigen Stellen vor; die zunächst an diesen Stellen eingeleiteten Bewegungen aber tragen sich im Laufe der Zeit an entferntere Stellen über, woraus gewissermaaßen ein successives Fortrücken der ursprünglichen Erscheinung im Raume hervorgeht. Denkt man sich im Innern des unsere Erde umgebenden großen Luftmeeres eine kleine kugelförmige Stelle durch welche Ursachen immer bedeutend dichter geworden, so wird rings um diesen Kugelraum herum, um mich so auszudrücken, ein Abfluß der verdichteten Luft nach allen Richtungen hin erfolgen und so lange andauern, bis sich der Ueberschuß an Luft in diesem kleinen Raume über einen so großen Raum verbreitet hat, um auf keine Weise mehr wahrgenommen werden zu können. Wäre umgekehrt die Luft an jener Stelle nicht verdichtet, sondern

verdünnt worden, so wäre nicht ein Abfluß von ihr aus in die Ferne, sondern ein Zufluß aus der Ferne nach ihr hin eingeleitet worden auf so lange, bis keine Unterschiede in der Dichtigkeit mehr vorhanden gewesen wären. In beiden Fällen gehen die Veränderungen von der genannten Stelle aus und setzen sich allmählig in größere Fernen fort, dauern jedoch an jeder Stelle wie in der Ferne eine gewisse Zeit lang an, obschon mit sehr abnehmendem Grade ihrer Intensität. Anders gestaltet sich die Sache, wenn eine Stelle unserer Atmosphäre abwechselnd Verdichtung und Verdünnung erlitte, wie z. B. in Folge der Schwingungsbewegung eines elastischen Körpers; dann würden die von einer Verdichtung herrührenden successiven Verdichtungen nach der Ferne hin sowie die von einer Verdünnung herrührenden successiven Verdünnungen abwechselnd einander auf dem Fuße folgen, so daß diese hinter einander hergehenden Verdichtungen und Verdünnungen sich in die Ferne zu bewegen scheinen müßten. Eine solche Art der Bewegung nennt man Wellenbewegung und sagt daher, die Schwingungen elastischer Körper pflanzen sich in der Luft wellenartig fort.

Beim ersten Blicke wird man sich zu dem Glauben hingetrieben fühlen, daß sich solche Wellenbewegungen noch viel schwieriger gründlich erfassen lassen werden, als die Schwingungen elastischer Körper; dem ist aber nicht so, der Wegfall der Grenzen in diesem Falle macht eine Menge von Bestimmungen überflüssig, die bei den Schwingungen begrenzter Körper einen großen Theil der zu beseitigenden Hindernisse ausmachen. Aus diesem Grunde war es möglich, daß schon Newton, bevor noch die Schwingungen der Körper in's Reine gebracht waren, die Geschwindigkeit, womit die Wellenbewegung in der Luft fortschreitet, was man die Geschwindigkeit des Schalles nennt, durch folgende Gleichung auszusprechen im Stande war:

$$a = \sqrt{\frac{p}{d} G}, \qquad (1.)$$

in welcher a die Geschwindigkeit des Schalles, p den Druck, unter welchem die Luft steht, in welcher sich der Schall verbreitet, d ihr specifisches Gewicht, und G die Beschleunigung des freien Falles bedeutet. Dieses von Newton aufgefundene Resultat ergab sich auch noch den spätern, mit größern Mitteln ausgerüsteten Mechanikern bis zu Lagrange hin. Als man jedoch die aus dieser Formel sich ergebende Geschwindigkeit des Schalles mit der aus sehr sorgfältig angestellten Beobachtungen verglich, fand es sich, daß die beobachtete Geschwindigkeit die berechnete fast um den fünften Theil der letztern übertrifft. Man war über die Größe dieses Unterschiedes, den man sich nicht erklären konnte, betroffen, bis Laplace darauf aufmerksam machte, daß man bei der Berechnung der Geschwindigkeit die Temperatur der Luft als constant vorausgesetzt hatte, während doch bekannt sei, daß verdichtete Luft sich erwärme, und verdünnte sich erkälte; und als dieser Gelehrte mit Berücksichtigung des von

ihm angeführten Umstandes die Rechnung noch einmal vornahm, gab sie ihm zum Resultat:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{d} G}\,, \qquad (2.\,a.)$$

in welcher Gleichung γ nach seiner Vorstellungsart das Verhältniß der specifischen Wärme der Luft bei constantem Druck zu deren specifischer Wärme bei constantem Volumen zu bezeichnen hat, welches Verhältniß die Physiker Gay-Lussac und Welter aus direkten Versuchen über das Verhalten der Wärme in Luft, welche ihre Dichtigkeit ändert, wie folgt:

$$\gamma = 1{,}3748 \qquad (2.\,b.)$$

gefunden hatten. Mit diesem Werthe von γ rückt die berechnete Schallgeschwindigkeit so nahe an die beobachtete hin, daß man beide als einander völlig bestätigend ansehen kann, zumal wenn man die Schwierigkeiten bei der Bestimmung von γ ins Auge faßt und deßhalb kleine bei ihm zur völligen Uebereinstimmung vorauszusetzende Fehler nicht hoch in Anschlag bringt.

Die neuesten Untersuchungen über Schallverbreitung haben die Mittel an die Hand gegeben, dessen Geschwindigkeit in jedem festen oder flüssigen Körper aus der Compressibilität dieses Körpers bei einem gegebenen Zuwachs des Druckes herzuleiten. Die so aufgefundenen theoretischen Resultate stimmen gut überein mit den im Wasser und in Metallen durch direkte Versuche erhaltenen Schallgeschwindigkeiten, und sagen aus, daß die Schallgeschwindigkeit im Wasser mehr als viermal, in Messing oder Eisen mehr als zehnmal so groß ist als in der Luft. Daher kommt es denn auch, daß ein Schall, der an dem einen Ende einer langen Röhrenleitung hervorgerufen wird, sich am andern Ende doppelt hören läßt, das erste Mal gelangt er durch das Medium der Röhrenwand an unser Ohr, das andere Mal durch das Zwischenmittel der in der Röhre eingeschlossenen Luft, wie Biot an einer fast 3000 Pariser Fuß langen gußeisernen Wasserleitungsröhre auf dem Wege der Beobachtung wahrgenommen hat, und auch von Andern bemerkt worden ist.

Im Laufe solcher Versuche an Röhrenleitungen trat den Beobachtern die Wahrnehmung entgegen, daß sich der Schall prismatischer und homogener Körper mit fast unveränderter Stärke fortpflanze, im Gegensatze zu der täglichen Erfahrung, daß der Schall in unserer Atmosphäre rasch an Stärke abnimmt und darum bald ganz verloren geht. So auffallend diese Thatsache auch dem sein mochte, der zuerst auf sie gestoßen ist, so sehr ist sie doch in Uebereinstimmung mit den Gesetzen, nach welchen sich die Uebertragung einer Bewegung von einem Körper auf den andern richtet. In unserer Atmosphäre, wo die an einer Stelle erzeugte Erschütterung sich nach allen Richtungen hin fortpflanzen kann, geht die bewegende Kraft allmählig in immer größere Schichten über, die nach dem Quadrate ihres Abstandes von jener Stelle zunehmen, weßwegen die Intensität der Bewegungen in demselben Verhältnisse

abnehmen muß; in röhren= oder stangenförmigen Körpern aber, die überall denselben Querschnitt haben, geht die bewegende Kraft successive auf andere Schichten von derselben Masse über, und darum bleibt die Intensität der Bewegungen schier ungeschwächt. Von solchen Thatsachen geleitet hat man die Resonanzböden zweier weit auseinanderstehender Flügel durch eine Eisenstange verbunden, und sich überzeugt, daß ein Musikstück, welches auf dem einen gespielt wurde, sich von selbst am andern fast in gleicher Stärke wiederholte. Aus ähnlichem Grunde wird der Schall in der unsere Erde umgebenden Luft stärker geschwächt, wenn er sich von oben nach unten hin bewegt, als wenn er in umgekehrter Richtung sich fortpflanzt. Im ersten Falle nämlich geht die Bewegung in stets dichtere Luft über und muß sich daher über eine entsprechend größere Masse verbreiten; im andern Falle hingegen geht dieselbe Kraft in eine verhältnißmäßig kleine Masse über, in der sie Bewegungen von größerer Weite hervorrufen kann, was eine relativ größere Stärke der Wirkung zur Folge hat.

Wenn die im Schalle auftretenden Luftschwingungen auf eine Fläche stoßen, die ihnen eine Bewegung in der eingepflanzten Richtung unmöglich macht, so werden sie nach denselben Gesetzen wie bewegte elastische Körper zurückgeworfen, und erzeugen dann das, was man Echo nennt. Stehen mehrere solche Wände in ungleichen Entfernungen vom Ohre und von der Quelle des Schalles einer vorhandenen Schallbewegung entgegen, so bilden sich die sogenannten vielfachen Echo's.

§. 51. Von den in wasserförmigen Flüssigkeiten aus der Schwere hervorgehenden Wellen.

Die wellenförmigen Schwingungsbewegungen, welche in den letzten Vorlesungen zur Sprache gekommen sind, und in der Regel von unserm Ohre als Schall empfunden werden, haben ihren Ursprung in einem fortdauernden Bestreben der die Körper beseelenden Molecularkräfte ihr Gleichgewicht wieder herzustellen, wenn dieses durch irgend Veranlassungen gestört worden ist. Solche wellenförmige Bewegungen hingegen, welche in ruhenden wasserförmigen Flüssigkeiten entstehen, wenn deren Oberfläche an einer ihrer Stellen sich abzuändern durch unmittelbaren äußern Einfluß gezwungen wird, gehen nicht sowohl aus den innern Kräften dieser Flüssigkeiten hervor, sondern sind ein Erzeugniß der auf die Flüssigkeitstheilchen von außen einwirkenden Schwere, als primum agens, im Vereine mit den Molecularkräften. Wiewohl nun auch diese andere Art der Wellenbewegung von den ausgezeichnetsten theoretischen Mechanikern der Neuzeit untersucht und in gewissem Sinne zu Ende geführt worden ist, so scheinen doch die von den Rechnern zur Erzielung einfacherer Resultate gemachten Annahmen nicht in dem Grade statthaft zu sein, daß die Theorie sich allerwärts vollkommen an die Erfahrung anschließen

könnte. Deßwegen ziehen wir es an dieser Stelle vor, die Beobachtungsresultate in ihren Hauptzügen mitzutheilen, welche von den Brüdern Weber erhalten und in ihrer Schrift: „Die Wellenlehre auf Experimente gegründet u. s. w. Leipzig 1825.“ ausführlich beschrieben worden sind.

Diese Gelehrten bedienten sich zu ihren Versuchen eigener Vorrichtungen, in denen sie Wellen nach Belieben erregen konnten und die von ihnen Wellenrinnen genannt wurden. Diese Wellenrinnen bildeten wasserdichte Kästen, deren Länge mehr als 5′ und deren Höhe mehr als 8″ betrug, deren Breite im Lichten aber bis auf weniger als 7‴ herab ging. Die zwei Seitenwände der Kästen, welche deren Länge in sich aufnahmen, waren, um die Bewegung der Flüssigkeit in ihrem Innern beobachten zu können, entweder ganz von Glas, oder es war die Holzwand stellenweise durchbrochen und mit Glas ausgefüttert. Die Erregung der Wellen in diesen Rinnen geschah in der Weise, daß ein harter, ihre ganze Breite einnehmender Körper an einer Stelle gegen die Oberfläche der Flüssigkeit gestoßen wurde, oder, was die Beobachter für noch zweckmäßiger erkannten, daß die Flüssigkeit mittelst einer bis zu einer bestimmten Tiefe in sie hinab ragenden Glasröhre aufgesaugt wurde, so wie auch, daß zuvor aufgesaugte und durch Verschließen des oberen Endes der Röhre in der Höhe gehaltene Flüssigkeit durch das Oeffnen dieses obern Endes plötzlich auf die Flüssigkeit in der Rinne herabfallen gelassen wurde. Um die Bewegungen im Innern der Flüssigkeit ganz bequem verfolgen zu können, brachten sie in ihr kleine schwebende Körperchen an, die ihnen als Repräsentanten der von den Flüssigkeitstheilchen selber eingeleiteten Bewegung galten. Die Herren Verfasser der erwähnten Schrift bedienen sich in ihren Beschreibungen, um größere Kürze mit größerer Bestimmtheit vereinigen zu können, der folgenden scharf definirten Ausdrücke. Die geradlinige Grenze, welche die in der Wellenrinne befindliche Flüssigkeit, wenn sie in Ruhe gekommen ist, an den Glaswänden bildet, wird von ihnen Niveaulinie genannt; die Grenzen der während der Bewegung der Flüssigkeit in einem bestimmten Augenblicke über die Niveaulinie emporragenden Flüssigkeitstheile heißen Wellenberge, und die Grenzen der unter die Niveaulinie in demselben Augenblicke hinabgesunkenen Flüssigkeitstheilchen Wellenthäler. Unter Breite eines Wellenberges oder eines Wellenthales wird das Stück der Niveaulinie verstanden, welches von dem Wellenberge oder Wellenthale abgeschnitten wird. Unter Höhe eines Wellenberges oder unter Tiefe eines Wellenthales versteht man dessen größte Entfernung von der Niveaulinie. Eine ganze Welle vereinigt einen Wellenberg sammt dem anstoßenden Wellenthale in sich; die Höhe einer ganzen Welle ist die Summe der Höhe ihres Wellenberges und der Tiefe ihres Wellenthales, und ihre Breite ist die Summe der Breiten ihrer beiden Bestandtheile. Der Gipfel eines Wellenberges ist die Vereinigung aller höchsten Stellen dieses Berges. Dieser Gipfel wird daher ein Punkt sein,

wenn der Wellenberg kegelförmig ist; er kann aber auch eine gerade oder krumme Linie werden, wenn der Wellenberg eine wallartige Form hat. Mit Hilfe dieser Benennungen geben wir nun einige der wichtigsten durch die beiden Brüder Weber beobachteten Thatsachen wieder.

1) In dem Augenblicke, wo die Oberfläche einer Flüssigkeit an einer ihrer Stellen eine äußere Einwirkung erleidet, diese mag hebender oder niederdrückender Art sein, finden anscheinend gleichzeitige Verschiebungen der Flüssigkeitstheilchen bis in große Tiefen statt, deren Richtungen von der verschiedensten Art sind, so daß manche von den Flüssigkeitstheilchen in demselben Augenblicke zum Steigen veranlaßt werden, wo andere niedersinken und wieder andere in horizontaler oder schiefer Richtung nach der einen und andern Seite sich hin bewegen; diese Verschiebungen erstrecken sich aber im ersten Augenblicke auf keine großen horizontalen Entfernungen von der Erregungsstelle. Diese gleichzeitigen und gewissermaßen einander contrariirenden Verschiebungen geschehen jedoch in solcher Weise, daß nirgends im Innern der Flüssigkeit leere Räume entstehen; es gleichen sich die verschiedensten Richtungen in einem sie alle regelnden allgemeinen Gesetze aus.

2) Während die Wellenbewegung sich von der erregten Stelle aus in die Ferne fortpflanzt, beschreiben die einzelnen Flüssigkeitstheilchen krummlinige Bahnen, die im Allgemeinen in sich selbst zurücklaufen und Ellipsen gleich sehen. Nur in seltenen Fällen, wo der Berg einer Welle eine beträchtlich andere Größe als ihr Thal annimmt, wie zuweilen bei den ersten Wellen geschieht, vor denen her die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit noch in Ruhe ist, beschreiben die Flüssigkeitstheilchen nicht in sich zurückkehrende Bahnen, sondern solche, die einem Umlauf von einer Spirallinie ähnlich sind, dessen Anfang und Ende seitwärts aus einander liegen.

3) Das Verhältniß der verticalen zur horizontalen Axe in den von den einzelnen Flüssigkeitstheilchen beschriebenen Ellipsen nimmt von der Oberfläche der Flüssigkeit bis zum Boden der Wellenrinne hin fortwährend ab. An der Oberfläche selber sind diese Bahnen nahehin Kreise, tiefer liegende Theilchen beschreiben Ellipsen, deren verticale Axe verhältnißmäßig kleiner als ihre horizontale ist; und schon in mäßiger Entfernung von der Oberfläche oscilliren die Theilchen in horizontalen Linien hin und her, welche Bewegung man so auffassen kann, als geschehe sie in einer Ellipse, deren verticale Axe null geworden ist.

Auch die horizontalen Axen der Ellipsen werden in größerer Tiefe kleiner, jedoch in viel geringerem Verhältnisse als die verticalen. Die Abnahme der horizontalen Axen scheint indessen in gewisser Tiefe eine Grenze zu erreichen; denn die beiden Brüder gewahrten in einer tiefen Wellenrinne, worin die Flüssigkeit 22 Zoll hoch aufgefüllt war, daß die Verkleinerung der horizontalen Axen der Bahnen bis zur Tiefe von 15 Zoll stets zunahm, daß aber

von da ab die horizontalen Durchmesser der Bahnen wieder größer wurden und schon in der Tiefe von 21 Zoll wieder eben so groß waren, wie in der Tiefe von 6 Zollen.

4) Was sich dem Auge als ein Fortschreiten der Wellen kund giebt, rührt nicht von einer stets fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitstheilchen her. Es ist ein bloßer Schein, der aus den elliptischen Bahnen dieser Theilchen in Verbindung mit dem Umstande entspringt, daß die hinter einander liegenden Flüssigkeitstheilchen nur successive in entsprechende Stellen ihrer Bahnen gelangen, in dem gleichen Augenblicke aber stetig sich abändernde Stellen ihrer Bahnen einnehmen. Die auf einander folgenden Theilchen einer Welle befinden sich gleichzeitig in allen den verschiedenen Stellungen, in welche eines von ihnen successive geräth, während es seine Bahn einmal durchläuft; daher ist der verticale Durchmesser dieser Bahnen der Höhe der ganzen Welle gleich. Die Breite der ganzen Welle dagegen kommt nicht mit dem horizontalen Durchmesser dieser Bahnen überein, diese beiden Größen sind in gewisser Weise unabhängig von einander. Man kann nur sagen, daß während die Welle um ihre eigene Breite vorwärtsschreitet jedes zu ihr gehörige Theilchen einmal seine Bahn durchläuft; jedes Flüssigkeitstheilchen legt demnach seine Bahn so oft zurück, als Wellen durch seinen Ort hindurch gehen. Diesem zur Folge stehen die Breite und die Geschwindigkeit einer Welle in einem einfachen Verhältnisse zu der Zeit, in welcher die Flüssigkeitstheilchen ihre Bahn durchlaufen.

5) Die vertical unter einander liegenden Flüssigkeitstheilchen befinden sich stets zu derselben Zeit in entsprechenden Stellen ihrer Bahnen; es scheinen sich in jeder horizontalen Schicht Wellen in entsprechender Weise fortzupflanzen, wiewohl die Bahnen der Theilchen einer jeden Schicht allmählig andere Formen annehmen. Doch hat sich aus den Beobachtungen herausgestellt, daß zum Durchlaufen der Bahnen einer obern Schicht mehr Zeit erforderlich ist, als zum Durchlaufen der Bahnen einer tiefer liegenden Schicht.

6) Die Geschwindigkeit der Wellenbewegung, d. h. der Weg, den die Welle in einer bestimmten Zeit zurücklegt, hängt nicht, wie Newton, s'Gravesande, d'Alembert und Gerstner behauptet haben, von deren Breite allein, sondern vom Vereine ihrer Höhe und Breite ab. Unter übrigens gleichen Umständen wird die Geschwindigkeit um so geringer, je geringer die Tiefe der Flüssigkeit ist, in der die Wellen entstehen, jedoch nimmt sie in viel geringerem Verhältnisse als diese Tiefe selber ab. Das specifische Gewicht der Flüssigkeit scheint auf die Geschwindigkeit der Wellenbewegung keinen Einfluß auszuüben, vorausgesetzt, daß die Größe der Wellen in beiden Fällen die gleiche ist. Die Geschwindigkeit der Wellen wächst mit der Intensität der Kraft, wodurch sie veranlaßt werden, und mit dieser Intensität steht die Größe der Wellen im Zusammenhange. Wenn die Wellen stets einerlei Länge

behalten, so vermindert sich während ihres Fortschreitens deren Höhe fort und fort, gleichzeitig aber vergrößert sich deren Breite, und dabei ändert sich deren Geschwindigkeit nicht merklich. Wenn die Länge einer im Fortschreiten begriffenen Welle stets größer wird, so vermindert sich gleichzeitig deren Höhe und Geschwindigkeit; umgekehrt nimmt deren Höhe und Geschwindigkeit stets zu, wenn sie im Fortschreiten allmählig geringere Längen anzunehmen gezwungen wird.

§. 52. Vom Höhenmessen mittelst des Barometers.

Da das Barometer den Druck unserer Atmosphäre an der Stelle mißt, an der es aufgestellt wird, und dieser Druck an höher gelegenen Orten, auf auf denen eine minder hohe Luftsäule lastet, nothwendig geringer ist, so muß das Barometer einen um so niedrigeren Stand annehmen, je weiter man sich mit ihm vom Mittelpunkt der Erde entfernt. Wäre man im Besitze des Gesetzes, wornach sich der Druck der Luft in größern Höhen ändert, so ließe sich der Stand des Barometers an einem Orte aus dem an einem andern Orte voraussagen, wenn der Höhenunterschied zwischen diesen beiden Orten gegeben wäre, und umgekehrt wäre der zwischen zwei Orten stattfindende Höhenunterschied aus den an diesen beiden Orten beobachteten Barometerständen abzuleiten. Wir werden, gleichsam als Anhang, die Hauptpunkte der hieher gehörigen Untersuchungen mit einiger Ausführlichkeit durchgehen, eben sowohl weil sie ziemlich verwickelt sind, als weil das Höhenmessen mit dem Barometer fast in allen Zweigen der Naturwissenschaft eine ungewöhnlich häufige Anwendung gefunden hat.

Zuvörderst fassen wir den hypothetischen Fall in's Auge, wo in der ganzen Atmosphäre eine und dieselbe Temperatur herrscht, welche die des aufthauenden Eises oder 0° C sein mag. Denkt man sich die ganze Atmosphäre in lauter unendlich dünne Schichten von einer gleichen Dicke, die durch δ vorgestellt werden mag, abgetheilt, so hat man an jeder Stelle innerhalb einer solchen Schicht den Druck der Luft sowohl wie deren Dichtigkeit als von gleicher Größe anzunehmen, und es ist dem mariotte'schen Gesetz zur Folge, wenn D_m und D_n die Dichtigkeiten, P_m und P_n die auf einerlei Flächengröße bezogenen Drucke in der m^{ten} und n^{ten} Schicht vorstellen:

$$D_m : D_n = P_m : P_n \, . \qquad (1.)$$

Läßt man diese Schichten von einer Kegelfläche durchschneiden, deren Spitze im Mittelpunkt der Erde liegt und deren Axe mit den Seiten nur sehr kleine Winkel bilden soll, so schneidet diese Kegelfläche aus jenen Schichten lauter Kugelschalen von der constanten Dicke δ aus, deren Größe nach dem Mittelpunkte der Erde zu stets geringer wird; bezeichnen nämlich F_m und F_n die von der Grenze der m^{ten} und n^{ten} Schicht durch die Kegelfläche ausgeschnittenen Flächengrößen, so ist:

$$F_m : F_n = (R + m\delta)^2 : (R + n\delta)^2 \,, \qquad (2.a.)$$

wenn R die Entfernung des Mittelpunktes der Erde von der innersten Schicht bedeutet, weil sich die Grundflächen ähnlicher Kegel wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten. Bezeichnen überdieß G_m und G_n die an der Grenze der m^{ten} und n^{ten} Schicht herrschenden Beschleunigungen, so ist nach dem, was wir oben über die Natur der Schwere gesagt haben:

$$G_m : G_n = (R + n\delta)^2 : (R + m\delta)^2 \,, \qquad (2.b.)$$

und aus den beiden letzten ergiebt sich die nachstehende Gleichung:

$$F_m \,.\, G_m = F_n \,.\, G_n \,. \qquad (2.c.)$$

Nun sind aber offenbar $\delta \,.\, F_m$ und $\delta \,.\, F_n$ die Räume, welche von der m^{ten} und n^{ten} Kugelschale, deren Dicke δ ist, eingenommen werden; stellen daher L_m und L_n die Gewichte der in der m^{ten} und n^{ten} Kugelschale befindlichen Luft an den Stellen vor, wo sich diese befinden, so ist dem zur Folge, was wir oben über die Bestimmung des Gewichts eines Körpers gesagt haben:

$$L_m = \delta \,.\, F_m D_m G_m \text{ und } L_n = \delta \,.\, F_n D_n G_n \,, \qquad (3.a.)$$

woraus im Hinblick auf die Gleichung (2.c.) folgt:

$$L_m : L_n = D_m : D_n \,, \qquad (3.b.)$$

und diese Proportion giebt in Verbindung mit der (1.):

$$L_m : L_n = P_m : P_n \,. \qquad (3.c.)$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir uns eine aus den Gleichungen (2.c.) und (3.a.) hervorgehende Eigenschaft unserer Schichtenräume zu Nutzen machen, wodurch alle noch kommenden Betrachtungen viel einfacher werden. Da nämlich in Folge der Gleichung (2. c.) das Produkt F_n G_n in jeder beliebigen n^{ten} Kugelschale ein und dasselbe ist, welches wir durch C bezeichnen wollen und deßhalb die Gleichungen (3.a.) auch so geschrieben werden können:

$$L_m = \delta \,.\, C \,.\, D_m \text{ und } L_n = \delta \,.\, C \,.\, D_n \,,$$

so überzeugt man sich, daß sich die Gewichte der in den auf einander folgenden Schichtenräumen enthaltenen Luft nicht ändern werden, wenn man sich statt der in der Richtung der Erdradien über einander liegenden Kugelschalen von der Dicke δ einen auf eine Ebene senkrecht aufgesetzten Cylinder parallel mit der Ebene in lauter Scheiben von der Dicke δ zerschnitten denkt, und in diesen auf einander folgenden Scheiben Luft von derselben Dichtigkeit annimmt, wie in den auf einander folgenden Kugelschalen, in diesem Cylinder aber die Einwirkung der Schwere überall als gleich groß und senkrecht gegen die Ebene geschehend voraussetzt, so daß deren Beschleunigung G an allen Stellen des Cylinders einen und denselben Werth hat, wofür wir den nehmen wollen, der auf unserer Erde da stattfindet, wo die Grenze zwischen ihr und ihrer Atmosphäre ist. Unter diesen Bedingungen ist das Gewicht der in der n^{ten} Cylinderscheibe enthaltenen Luft gleich $\delta F G D_n$, wenn F die Größe der Grundfläche des senkrecht auf die Ebene aufgesetzten Cylinders vorstellt, und es ist $F \,.\, G = C$, wenn wir diese Grundfläche eben so groß sein lassen, wie die Fläche, in

welcher unsere Atmosphäre an ihrer untern Grenze von der früher eingeführten Kegelfläche durchschnitten wird, weil in diesem Falle FG sich auf die erste Kugelschale bezieht und dieses Produkt in ihr wie in allen übrigen Kugelschalen den constanten Werth C hat. Es ist folglich das Gewicht in der n^{ten} Cylinderscheibe $\delta\,.\,C\,.\,D_n$, sonach genau dasselbe wie in der n^{ten} Kugelschale; weil wir aber die Richtung der Schwerewirkung in diesem Luft-Cylinder seiner Axe parallel angenommen haben, so lasten dessen Scheiben mit den gleichen Gewichten über einander wie die Kugelschalen in jener Kegelfläche; es üben daher die über einer beliebigen n^{ten} Scheibe liegenden Scheiben auf diese Weise völlig den gleichen Druck P_n aus, wie die über der gleichvielten Kugelschale liegenden Kugelschalen auf diese, wenn wir uns die Schichten von verschiedener Dichtigkeit in beiden Fällen auf die gleiche Weise fortgesetzt denken, so daß also die in den einzelnen Cylinderscheiben supponirten Dichtigkeiten der Luft wirklich die dem mariotte'schen Gesetze entsprechenden sind. Es findet sonach in unserm imaginirten Luft-Cylinder nicht nur die Gleichung (1.), sondern auch die (3. c.) statt, wenn wir die darin vorkommenden Größen in der gleichen Bedeutung auf die m^{te} und n^{te} Cylinderscheibe beziehen, wie sie dort der m^{ten} und n^{ten} Kugelschale beigelegt worden sind. Das Resultat dieser Betrachtungen sprechen wir in dem folgenden Satze aus: W i r s i n d b e r e c h t i g t, s t a t t d e r u n s e r e E r d e u m g e b e n d e n A t m o s p h ä r e, a u f d e r e n v e r s c h i e d e n e S t e l l e n d i e S c h w e r e u m g e k e h r t n a c h d e n Q u a d r a t e n i h r e r E n t f e r n u n g e n v o m M i t t e l p u n k t e d e r E r d e e i n w i r k t, u n s e i n e ü b e r e i n e E b e n e a u s g e b r e i t e t e L u f t m a s s e v o n g l e i c h e r D i c k e v o r z u s t e l l e n, d e r e n v e r s c h i e d e n e S t e l l e n i n s e n k r e c h t e r R i c h t u n g g e g e n d i e s e E b e n e m i t e i n e r s t e t s g l e i c h e n K r a f t h i n g e t r i e b e n w e r d e n, w e l c h e K r a f t i n B e z u g a u f a l l e S t e l l e n d i e s e r L u f t m a s s e d e r E r d s c h w e r e a n d e n O r t e n, w o d i e A t m o s p h ä r e u n d d i e E r d e (a l s K u g e l g e d a c h t) a n e i n a n d e r g r e n z e n, g l e i c h z u n e h m e n i s t, o h n e d a ß d a d u r c h d i e D i c h t i g k e i t e n u n d D r u c k e d e r L u f t i n d e n a u f e i n a n d e r f o l g e n d e n g l e i c h n a m i g e n S c h i c h t e n v o n g l e i c h e r D i c k e i r g e n d e i n e V e r ä n d e r u n g e r l i t t e n. L a p l a c e und nach ihm P o i s s o n haben den Luftdruck in unserer Atmosphäre aus dem Druck der Luft in einem lothrechten Cylinder hergeleitet, dabei aber die mit der Natur der Sache nicht vereinbare Annahme gemacht, daß der Druck der obern Schichten in diesem Cylinder dem Quadrate ihrer Entfernung vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt proportional gesetzt werden müsse. Diese Unrichtigkeit ist auch in die von jenen Gelehrten gegebenen Höhenmessungsformeln mittelst des Barometers übergegangen. Unsere in §. 54. als letzte der Gleichungen (4. b.) mitgetheilte Barometerformel ist deßwegen nicht nur richtiger, sondern auch einfacher geworden, als es die bisher gegebenen sind. Da aller Druck in unserer Atmosphäre in Richtungen ausgeübt wird, die

durch den Mittelpunkt der Erde hindurch laufen, so darf derselbe aus einer Cylinderform nur mittelst der vorhin angegebenen Restriktion abgeleitet werden.

Wir fahren nun, diese Substitution benützend, in unsern Betrachtungen weiter fort. Die in den Gleichungen (1.) und (3.c.) vorkommenden Drucke P_m und P_n, welche der m^{ten} und n^{ten} Schicht entsprechen, haben sich auf gleiche Flächengrößen zu beziehen, worauf schon bei der Aufstellung der Gleichung (1.) aufmerksam gemacht worden ist; wir wollen hierzu die Grundfläche des in unserer Substitution auftretenden Luft-Cylinders wählen und die auf diesen Luft-Cylinder übergetragene Gleichung (3.c.) so schreiben:

$$L_1 : P_1 = L_n : P_n \,, \qquad (4.a.)$$

indem wir die m^{te} Schicht zur ersten werden lassen und unter den Drucken P_1 und P_n die am Ende der ersten und n^{ten} Schicht vorhandenen verstehen. Aus der Gleichung (4.a.) folgt aber sogleich:

$$L_1 + P_1 : P_1 = L_n + P_n : P_n \,,$$

und es ist offenbar, weil P_1 den am Ende der ersten Schicht über die Fläche F verbreiteten Druck und L_1 das über der gleichen Fläche liegende Gewicht der ersten Cylinderscheibe bedeutet, $L_1 + P_1$ der Druck am Anfang der ersten Schicht, d. h. an der untern Grenze der Luft, welchen wir durch P bezeichnen werden, und in gleicher Weise stellt $L_n + P_n$ den Druck der Luft an der Grenze zwischen der $n - 1^{sten}$ und n^{ten} Schicht vor, welchen wir unserer eingeführten Bezeichnungsweise zur Folge durch P_{n-1} darstellen müssen. Die zuletzt aufgestellte Gleichung wird demnach

$$P : P_1 = P_{n-1} : P_n \qquad (4.b.)$$

und giebt:

$$P_n = \frac{P_1}{P} \cdot P_{n-1} \,. \qquad (4.c.)$$

Diese letzte Gleichung liefert, wenn man n successive immer um 1 kleiner werden läßt, die folgenden:

$$P_n = \frac{P_1}{P} P_{n-1} \,, \quad P_{n-1} = \frac{P_1}{P} P_{n-2} \,, \quad P_{n-2} = \frac{P_1}{P} P_{n-3} \,, \text{ u. s. f. bis}$$

$$P_1 = \frac{P_1}{P} \cdot P \,, \qquad (5.a.)$$

und das Produkt von allen diesen Gleichungen giebt:

$$P_n = \left(\frac{P_1}{P}\right)^n P \,. \qquad (5.b.)$$

Setzt man

$$\frac{P}{P_1} = Q \,, \qquad (6.a.)$$

so nimmt die Gleichung (5.b.) die Form

$$P_n = \frac{1}{Q^n} P \text{ oder } P_n \, Q^n = P \qquad (6.b.)$$

an, aus welcher, wenn man sie in Logarithmen von derselben, übrigens beliebigen Basis überträgt, sich die folgende ergiebt:

$$n \log Q = \log \frac{P}{P_n} \quad , \qquad (7.\,a.)$$

aus der man findet:

$$n = \frac{1}{\log Q} \cdot \log \frac{P}{P_n} \quad . \qquad (7.\,b.)$$

Läßt man $n\delta = h'$ sein, wo dann h' der lothrechte Abstand solcher Stellen, in welchen der Druck P_n stattfindet, von den Stellen ist, in denen der Druck P herrscht, so geht hierdurch die Gleichung (7. b.) in die andere über:

$$h' = \frac{\delta}{\log Q} \cdot \log \frac{P}{P_n}$$

und diese Gleichung wird, wenn man

$$\frac{\delta}{\log Q} = K \qquad (7.\,c.)$$

setzt:

$$h' = K \log \frac{P}{P_n} \quad . \qquad (7.\,d.)$$

Eben so wird der lothrechte Abstand h'' solcher Stellen, die am Ende der m^{ten} Schicht liegen, wo der Druck P_m ist, von den Stellen, die sich an der untern Luftgrenze befinden, durch die Gleichung

$$h'' = K \log \frac{P}{P_m} \qquad (7.\,e.)$$

erhalten, und die Differenz zwischen diesen beiden letzten Gleichungen liefert:

$$h' - h'' = K \cdot \log \frac{P_m}{P_n} \qquad (7.\,f.)$$

vermöge der Eigenschaften der Logarithmen. Die Gleichung (7. f.) zeigt, wie sich aus den an verschiedenen Orten der Atmosphäre herrschenden Drucken P_m und P_n der Höhenunterschied $h' - h''$ dieser beiden Orte berechnen läßt.

§. 53. Fortsetzung.

Den Gleichungen des vorigen Paragraphs liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß die Temperatur der Atmosphäre an allen Stellen 0° C ist. Denken wir uns jetzt alle Stellen der Atmosphäre aus irgend Ursachen auf die Temperatur 1° C erhoben, so wird dadurch die Höhe der ganzen Atmosphäre zwar in Folge der dadurch herbeigeführten Ausdehnung der Luft größer werden, aber wir können uns sie demungeachtet wieder in eben so viele Schichten von gleicher Dicke (welche Dicke aber jetzt eine andere als zuvor sein wird, die wir durch δ' bezeichnen wollen), zerlegt vorstellen, auf welche hier wieder alle Betrachtungen des vorigen Paragraphs ganz eben so wie dort ihre An=

wendung finden, so daß man noch immer, obgleich die Temperatur um t^0 C höher geworden ist, wenn P' den Druck am untern Ende der ganzen Atmosphäre, P'_1 den am obern Ende der ersten Luftschichte von der Dicke δ' bedeutet, und

$$Q' = \frac{P'}{P'_1} \qquad (1.a.)$$

gesetzt wird, hat:

$$h' = \frac{\delta'}{\log Q'} \log \frac{P'}{P_n}, \quad h'' = \frac{\delta'}{\log Q'} \log \frac{P'}{P_m} \text{ und } h' - h'' = \frac{\delta'}{\log Q'} \log \frac{P_m}{P_n},$$

wobei P_m und P_n die an zwei beliebigen Orten, welche der obern Grenze der m^{ten} und n^{ten} Luftschicht angehören, beobachteten Drucke, h' und h'' die lothrechten Erhebungen dieser Orte über das untere Ende der t^0 C warmen Atmosphäre vorstellen. Diese letzten Gleichungen werden, wenn man

$$\frac{\delta'}{\log Q'} = K' \qquad (1.b.)$$

setzt:

$$h' = K' \log \frac{P'}{P_n}, \quad h'' = K' \log \frac{P'}{P_m}, \quad h' - h'' = K' \log \frac{P_m}{P_n}. \qquad (1.c.)$$

Es werden also die lothrechten Erhebungen der Orte über die untere Grenze der Atmosphäre nach der Erwärmung noch durch Gleichungen von ganz gleicher Form wie zuvor gefunden, nur die Coefficienten K und K′ können in beiden Fällen von einander verschieden sein, und wir wollen nun zusehen, worin diese Verschiedenheit besteht.

Um zu der gewünschten Einsicht zu gelangen, müssen wir vor Allem die Natur des Coefficienten K näher kennen lernen. Zu diesem Ende bemerken wir, daß $P = P_1 + L_1$ oder $P_1 = P - L_1$ ist, weil der Druck P am untersten Ende der Atmosphäre aus dem Gewichte der ersten Schicht L_1 und dem Drucke P_1 von allen über dieser liegenden Schichten zusammengesetzt ist, und daß gemäß der Annahme von unendlich dünnen Schichten L_1 in Vergleich zu P eine unendlich kleine Größe ist, so daß man den Eigenschaften der Logarithmen zur Folge hat:

$$\log P_1 = \log (P - L_1) = \log P - M \frac{L_1}{P},$$

wenn M die Zahl bedeutet, womit man die natürlichen Logarithmen multipliciren muß, um die in die Rechnung aufgenommenen zu erhalten. Diesem entsprechend wird:

$$\log Q = \log \frac{P}{P_1} = \log P - \log P_1 = M \frac{L_1}{P},$$

oder wenn man für L_1 seinen Werth aus Gleichung (3.a.) des vorigen Paragraphs einsetzt, wobei es gestattet ist, $F = 1$ zu nehmen, d. h. das Gewicht so wie den Druck auf die Flächeneinheit zu beziehen:

$$\log Q = M \frac{\delta D G}{P}$$

wenn D die Dichtigkeit und G die Intensität der Schwere in der untersten Luftschicht vorstellt, und nun findet man:

$$K = \frac{\delta}{\log Q} = \frac{P}{D} \cdot \frac{1}{MG} . \qquad (2.a.)$$

Auf gleiche Weise findet man aber auch

$$K' = \frac{\delta'}{\log Q'} = \frac{P'}{D'} \cdot \frac{1}{MG} \qquad (2.b.)$$

wenn P′ den Druck und D′ die Dichtigkeit der Luft in der untersten Schicht der t^0 C erwärmten Atmosphäre bezeichnen, weil M und G von der Erwärmung der Atmosphäre unabhängig sind.

Nach den neuesten Versuchen von Magnus und Regnault dehnt sich der Raum 1 von trockener Luft bei 0^0 C in den $1 + 0{,}003665 \,.\, t$ bei t^0 C aus, wenn der Druck in beiden Fällen der gleiche ist, so daß bei einem bestimmten Drucke die Dichtigkeit der t^0 C warmen Luft $\frac{1}{1 + 0{,}003665 \,.\, t}$ mal die der 0^0 C kalten ist. Ferner geht aus der Gleichung (1.) des vorigen Paragraphs hervor, daß das Verhältniß des Druckes zur Dichtigkeit der Luft in einer gleich warmen Atmosphäre an allen ihren Stellen dasselbe ist, man kann also $P' = P$ werden lassen, muß dann aber dem eben Gesagten gemäß $D' = \frac{D}{1 + 0{,}003665 \,.\, t}$ nehmen. Darum wird

$$\frac{P'}{D'} = \frac{P}{D} (1 + 0{,}003665 \,.\, t)$$

und diesem zur Folge ist

$$K' = K (1 + 0{,}003665 \,.\, t) . \qquad (2.c.)$$

Um also die für 0^0 C gültigen Gleichungen der vorigen Nummer auf den Fall anwendbar zu machen, wo die Temperatur der Atmosphäre an allen Stellen t^0 C ist, hat man blos deren Coefficienten K mit dem Factor $1 + 0{,}003665 \,.\, t$ zu multipliciren.

Den Coefficienten K können wir noch näher bestimmen, als es durch die Gleichung (2.a.) geschehen ist, wenn wir erwägen, daß er einer Atmosphäre angehört, welche an allen ihren Stellen die Temperatur 0^0 C hat.

Fassen wir eine Stelle dieser Atmosphäre in's Auge, wo die Intensität der Schwere $\mathfrak{G}$ ist, und bezeichnen wir durch $\mathfrak{D}$ die Dichtigkeit der Luft an dieser Stelle und durch $\mathfrak{P}$ ihren Druck, so ist also

$$\frac{P}{D} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} .$$

Der auf die Flächeneinheit bezogene Druck der Luft an dieser Stelle wird aber gemessen durch das Gewicht einer Quecksilbersäule von der Grund-

fläche 1 und einer Höhe, die durch den Stand des Barometers an dieser Stelle angezeigt wird, welcher Stand durch 𝔅 bezeichnet werden mag; es ist also

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{B} \triangle \mathfrak{G},$$

wenn $\triangle$ die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° C vorstellt; darum wird erstlich

$$\frac{P}{D} = \frac{\mathfrak{B} \triangle \mathfrak{G}}{\mathfrak{D}},$$

sodann der Gleichung (2. a.) zur Folge:

$$K = \frac{\mathfrak{B} \triangle}{\mathfrak{D}\, M} \cdot \frac{\mathfrak{G}}{G}.$$

Nun haben Biot und Arago in Paris durch sehr genaue Versuche ermittelt, daß dort bei einem Barometerstande von $0^m,76$ und bei 0° C Temperatur

$$\frac{\triangle}{\mathfrak{D}} = 10463$$

ist, folglich wird, wenn wir den Gebrauch von Brigg'schen Logarithmen voraussetzen, wo man dann $\frac{1}{M} = 2,3025851$ zu setzen hat:

$$\frac{\mathfrak{B} \triangle}{\mathfrak{D}\, M} = 18309^m,88,$$

und dieß giebt:

$$K = 18309^m,88 \,.\, \frac{\mathfrak{G}}{G}, \qquad (3.\ a.)$$

wobei $\mathfrak{G}$ die Intensität der Schwere in Paris, G hingegen die an der untersten Schichte unserer Atmosphäre vorstellt. Hierbei hat man zu bemerken, daß sich die Intensität der Schwere an den verschiedenen Stellen unserer Erde nicht nur mit deren Abstande vom Mittelpunkte der Erde, sondern zugleich auch in Folge ihrer Axendrehung mit deren geographischen Breite ändert. Aus diesem Grunde wird es nöthig, damit man es nicht mit einem wandelbaren Werthe von G zu thun bekomme, daß die Orte, auf welche sich die Höhen h′ und h″ beziehen, unter merklich gleicher Breite liegen.

Bekanntlich findet man die Intensität der Schwere eines unter der Breite ψ gelegenen Orts auf unserer Erde, wenn man die eines gleich hoch und unter 45° Breite liegenden Ortes mit $1 - 0,002588 \,.\, \cos 2\,\psi$ multiplicirt, und da die Breite von Paris 48° 50′ 14″ ist, so wird

$$\frac{\mathfrak{G}}{G} = \frac{1 - 0,002588 \,.\, \cos 2\ (48^\circ\, 50'\, 14'')}{1 - 0,002588 \,.\, \cos 2 \,.\, \psi} = \frac{1,0003457}{1 - 0,002588 \cos 2\,\psi},$$

wenn man den sehr geringen Höhenunterschied zwischen Paris und dem Meere nicht in Anschlag bringt, und hiernach wird

$$K = 18316^{m},21 \,.\, \frac{1}{1 - 0,002588 \cos 2\psi} \qquad (3.\,b.)$$

so wie

$$K' = 18316^{m},21 \,.\, \frac{1 + 0,003665 \,.\, t}{1 - 0,002588 \,.\, \cos 2\psi} \,. \qquad (3.\,c.)$$

Zum Schlusse wollen wir nun noch die Drucke P', $P_{''}$ und $P_{'''}$, welche den Höhen 0, h', h'' über der Meeresfläche oder den Entfernungen R, $R + h'$, $R + h''$ der unter gleicher Breite ψ liegenden Beobachtungsorte vom Mittelpunkt der Erde entsprechen, durch Barometerstände B, B', B'', welche auf Quecksilber von der Dichte $\triangle$ bei $0°$ C reducirt vorausgesetzt werden, ausdrücken. Es ist nämlich

$$P' = B \triangle G \,,\quad P_{''} = B' \triangle G' \,,\quad P_{'''} = B'' \triangle G'' \,,$$

wenn G, G', G'' die Beschleunigungen der Schwere an den drei unter gleicher Breite liegenden Orten, deren Erhebungen über dem Meere 0, h' und h'' sind, vorstellen; daher hat man

$$\frac{P'}{P_{''}} = \frac{B}{B'}\;\frac{G}{G'} \,,\quad \frac{P'}{P_{'''}} = \frac{B}{B''}\;\frac{G}{G''} \,,\quad \frac{P_{'''}}{P_{''}} = \frac{B''}{B'}\;\frac{G''}{G'} \,.$$

Es ist aber der Natur der Schwerkraft ensprechend:

$$G : G' : G'' = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{(R + h')^2} : \frac{1}{(R + h'')^2}$$

und diesem zur Folge wird:

$$\frac{P'}{P_{''}} = \frac{B}{B'}\;\frac{(R + h')^2}{R^2} \,,\quad \frac{P}{P_{'''}} = \frac{B}{B''}\;\frac{(R + h'')^2}{R^2} \,,\quad \frac{P_{'''}}{P_{''}} = \frac{B''}{B'} \,.\, \frac{(R + h')^2}{(R + h'')^2} \,.$$

Durch diese Werthe von $\frac{P'}{P_{''}}$, $\frac{P'}{P_{'''}}$ und $\frac{P_{'''}}{P_{''}}$ aber gehen die Gleichungen (1. c.) über in:

$$h' = K' \left[\log \frac{B}{B'} + 2 \log \left(1 + \frac{h'}{R}\right)\right] \,,\quad h'' = K' \left[\log \frac{B}{B''} + 2 \log \left(1 + \frac{h''}{R}\right)\right]$$

$$\text{und } h' - h'' = K' \left[\log \frac{B''}{B'} + 2 \log \frac{1 + \frac{h'}{R}}{1 + \frac{h''}{R}}\right] \,, \qquad (4.\,a.)$$

und in diesen Gleichungen kann man, weil immer h' und h'' sehr vielmal kleiner als R sind,

$$\log \left(1 + \frac{h'}{R}\right) = M \frac{h'}{R} \,,\quad \log \left(1 + \frac{h''}{R}\right) = M \frac{h''}{R}$$

$$\text{und } \log \frac{1 + \frac{h'}{R}}{1 + \frac{h''}{R}} = M \frac{h' - h''}{R}$$

setzen, wobei der Buchstabe M dieselbe Bedeutung hat, wie kurz vor der Gleichung (3. a.) angegeben worden ist, so daß die Gleichungen (4. a.) sich verwandeln in:

$$\left.\begin{aligned} h'\left(1-2K'\frac{M}{R}\right) &= K'\log\frac{B}{B'}\,, \\ h''\left(1-2K'\frac{M}{R}\right) &= K'\log\frac{B}{B''}\,, \\ (h'-h'')\left(1-2K'\frac{M}{R}\right) &= K'\log\frac{B''}{B'}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (4.\,b.)$$

Man ersieht hieraus, daß sich die Werthe h′, h″ und h′ — h″ immer ganz einfach aus den Größen K′, B′ und B″ berechnen lassen, und daß die dritte der Gleichungen (4. b.) die zwei ersten schon in sich enthält, wenn man in ihr entweder $h' = 0$ oder $h'' = 0$ werden läßt.

§. 54. Schluß der allgemeinen Physik.

Die im vorigen Paragraph mitgetheilten Gleichungen (4. b.) sind unter der Voraussetzung erhalten worden, daß die Luft unserer Atmosphäre vollkommen trocken sei und daß an allen ihren Stellen die Temperatur t^0 C herrsche, und sie haben auch nur unter diesen Voraussetzungen unbedingte Giltigkeit. In der Wirklichkeit aber finden diese Voraussetzungen keineswegs statt, denn es ist weder die unsere Erde umgebende Atmosphäre je vollkommen trocken, noch ist die Temperatur an allen ihren Stellen je die gleiche, sondern diese nimmt sowohl in der Richtung der Erdradien als in der Richtung von der heißen zur kalten Zone fortwährend ab.

Aus diesen Temperaturungleichheiten aber entspringen immerwährende und noch dazu veränderliche Luftströmungen auf unserer Erde, wodurch nur noch um so mehr die Unanwendbarkeit jener Gleichungen auf die Atmosphäre, von der unsere Erde in der Wirklichkeit umgeben ist, eine nothwendige Folge werden zu müssen scheint. Gleichwohl lehrt die Erfahrung, daß jene unter so naturwidrigen Voraussetzungen erhaltenen Gleichungen mit geringen Abänderungen auf unsere bewegte, an ihren verschiedenen Stellen sehr ungleich erwärmte Luft angewendet werden können, und dabei überraschend genaue Resultate liefern, was ohne Zweifel nur darin seinen Grund hat, daß überhaupt die Gegenwart des Wassers in der Luft so wie eine Veränderung der Temperatur der Luft von nicht sehr großem Umfange nur relativ geringe Aenderungen im Druck der Luft bewirken, die sich daher leicht mit hinreichender Genauigkeit bestimmen lassen, wenn nur halbweg zuläßige Annahmen bezüglich der Menge des in der Luft befindlichen Wasserdampfes und bezüglich des Temperaturwechsels in ihr längs eines Erdradius' gemacht werden können.

Was man bis jetzt in dieser Beziehung thun zu müssen glaubte, soll nun noch in möglichster Kürze angezeigt werden, wobei wir blos die dritte der Gleichungen (4. b.) im Auge behalten werden.

Erstlich was die Abnahme der Temperatur in den verschiedenen Höhen der Atmosphäre betrifft, so sagte man sich, daß der Fehler in keinem Falle sehr beträchtlich werden könne, wenn man die Temperatur t'' an der Stelle, wo das Barometer die Höhe B'' zeigt, beobachtet, und eben so die Temperatur t' an der Stelle, wo das Barometer die Höhe B' zeigt, und dann in dem Werthe von K' den Mittelwerth zwischen diesen beiden Temperaturen, nämlich $\frac{t' + t''}{2}$, an die Stelle von t setzt. Hierdurch wird aber der Gleichung (3. c.) im vorigen Paragraph zur Folge:

$$K' = 18316^{m},21 \cdot \frac{1 + 0{,}003665 \cdot \frac{t' + t''}{2}}{1 - 0{,}002588 \cdot \cos 2\,\psi} \cdot$$

Zweitens was die Menge des in der Luft befindlichen Wasserdampfes betrifft, so entschloß man sich, auch hier wieder die Mitte zwischen den beiden Grenzen der äußersten Trockenheit und der äußersten Feuchtigkeit zu wählen und darnach den Coefficienten $18316^{m},21$ der vorstehenden Gleichung in $18337^{m},46$ abzuändern; weil aber in größerer Wärme zugleich auch mehr Wasser die Luftform annimmt, so glaubte man sich auch eine entsprechende Aenderung des neben $\frac{t' + t''}{2}$ stehenden Factors $0{,}003665$ erlauben zu dürfen und Poisson setzt statt desselben der Bequemlichkeit der Rechnung halber, wie er sich ausdrückt, den $\frac{4}{1000}$. Es scheint indessen gerathener zu sein, viele mit möglichster Genauigkeit trigonometrisch gemessene Höhen, bei sehr verschiedenen Werthen von t' und t'' mittelst des Barometers zu bestimmen und daraus die Mittelwerthe der eben besprochenen beiden Zahlen abzuleiten, wobei sich zugleich zeigen würde, ob vielleicht der zu $\frac{t' + t''}{2}$ gehörige Factor selbst sich mit dem Werthe von $\frac{t' + t''}{2}$ verändert. So würde man sich wenigstens von dem Vorwurfe einer gar zu großen Willkührlichkeit frei erhalten, und zu Zahlen gelangen, die sich jedenfalls den wechselnden Umständen am besten anschließen würden. In dieser Beziehung erlaube ich mir namentlich auf den Factor $1 - 2\,K' \frac{M}{R}$ in den Gleichungen (4. b.) des vorigen Paragraphs aufmerksam zu machen, der meistens ganz und gar vernachlässigt zu werden pflegt, und der Größe des in ihm enthaltenen Bestandtheils K' wegen doch auf das Resultat der Rechnung einen größern Einfluß hat,

als die meisten Aenderungen, welche man an dem Werthe von K′ selber vornehmen zu müssen glaubte, um die Messungen mit dem Barometer in eine noch bessere Uebereinstimmung mit den trigonometrischen zu bringen.

Endlich darf ich hier die Vorsichtsmaßregeln nicht ganz übergehen, die man beim Höhenmessen mittelst des Barometers vorzuschreiben sich veranlaßt fand.

Man will das Messen mit dem Barometer nicht an solchen Tagen vorgenommen wissen, an welchen das Barometer ungewöhnlich großen Schwankungen unterworfen ist oder heftige Winde wehen. Diese Regel hat darin ihren guten Grund, daß dergleichen Erscheinungen außergewöhnliche Hergänge in der Atmosphäre ankündigen, bei denen leicht diejenige Luftschichtungsweise aus der Regel heraustreten könnte, die zum sichern Gebrauch jener Gleichungen gefordert wird. An diese Vorschrift schließt sich die andere an, daß man die correspondirenden Beobachtungen an den beiden Stationen so viel als möglich gleichzeitig anstellen und die Stationen selber nicht weit aus einer und derselben lothrechten Richtung liegend wählen soll; diese gründet sich darauf, daß kleinere, abnorme Veränderungen in lothrecht über einander liegenden Orten der Regel nach gleichzeitig eintreten und man dann nicht zu fürchten hat, daß die an einem Orte sich kundgebende Abweichung mit der am andern Orte in Widerstreit gerathe. Als dritte Vorschrift stellt man auf, daß die correspondirenden Thermometer- und Barometerbeobachtungen nur an den Tageszeiten gegen 9 Uhr Vormittags oder gegen 4 Uhr Nachmittags gemacht werden sollen. Diese Vorschriftsmaaßregel ist aus der Wahrnehmung hervorgegangen, daß in der Nähe des Sonnenaufgangs und Untergangs die Abnahme der Temperatur mit der Höhe sich nicht selten zunächst an der Erdoberfläche in ihr Gegentheil verwandelt, wodurch die Auffindung einer mittlern Temperatur zu diesen Tageszeiten unsicherer wird. Nach Aufgang der Sonne nimmt die Luftströmung, welche durch die Erwärmung der Erdrinde veranlaßt wird, bis gegen Mittag, wo sie ein Maximum erreicht, fortwährend zu, und von hier ab nimmt sie bis zum Sonnenuntergang wieder ab; es tritt also in dieser Beziehung in der Nähe des Mittags ein Wendepunkt ein, der auf das Gesetz der Temperaturen wohl einen Einfluß üben könnte. Der stabilste Zustand unserer Atmosphäre findet sehr wahrscheinlich bald nach Mitternacht statt, aber diese Zeit verbietet sich zu Höhenbestimmungen meistens schon von selbst.

als die meisten Aenderungen, welche man an dem Werthe von K selbst vorzunehmen zu müssen glaubte, um die Messungen mit dem Barometer in eine noch bessere Uebereinstimmung mit den trigonometrischen zu bringen.

Endlich darf ich hier die Vorsichtsmaßregeln nicht ganz übergehen, die man beim Höhenmessen mittelst des Barometers vorzuschreiben sich veranlaßt fand.

Man will das Messen mit dem Barometer nicht an solchen Tagen vorgenommen wissen, an welchen das Barometer ungewöhnlich großen Schwankungen unterworfen ist oder heftige Winde wehen. Diese Regel hat darin ihren guten Grund, daß dergleichen Erscheinungen außergewöhnliche Vorgänge in der Atmosphäre ankündigen, bei denen leicht diejenige Luftschichtungsweise aus der Regel heraustreten könnte, die zum sichern Gebrauch jener Gleichungen gefordert wird. An diese Vorschrift schließt sich die andere an, daß man die correspondirenden Beobachtungen an den beiden Stationen so viel als möglich gleichzeitig anstellen und die Stationen selber nicht weit aus einer und derselben lothrechten Richtung liegend wählen soll; diese gründet sich darauf, daß kleinere, abnorme Veränderungen in lothrecht über einander liegenden Orten der Regel nach gleichzeitig eintreten und man dann nicht zu fürchten hat, daß die an einem Orte sich kundgebende Abweichung mit der am andern Orte in Widerstreit gerathe. Als dritte Vorschrift stellt man auf, daß die correspondirenden Thermometer- und Barometerbeobachtungen nur an den Tageszeiten gegen 9 Uhr Vormittags oder gegen 4 Uhr Nachmittags gemacht werden sollen. Diese Vorsichtsmaßregel ist aus der Wahrnehmung hervorgegangen, daß in der Nähe des Sonnenaufgangs und Untergangs die Abnahme der Temperatur mit der Höhe sich nicht selten zunächst an der Erdoberfläche in ihr Gegentheil verwandelt, wodurch die Aufschichtung einer mittlern Temperatur zu diesen Tageszeiten unsicherer wird. Nach Aufgang der Sonne nimmt die Luftströmung, welche durch die Erwärmung der Erdrinde veranlaßt wird, bis gegen Mittag, wo sie ein Maximum erreicht, fortwährend zu, und von hier ab nimmt sie bis zum Sonnenuntergang wieder ab; es tritt also in dieser Beziehung in der Nähe des Mittags ein Wendepunkt ein, der auf das Gesetz der Temperaturen wohl einen Einfluß üben könnte. Der stabilste Zustand unserer Atmosphäre findet sehr wahrscheinlich bald nach Mitternacht statt, aber diese Zeit verbietet sich zu Höhenbestimmungen meistens schon von selbst.